SUR LA THÉORIE DES CORPS DE CLASSES POUR LES VARIÉTÉS SUR LES CORPS p-ADIQUES

Tamás Szamuely (Budapest)

Abstract. — Let k be a p-adic field. Consider a smooth, proper, geometrically integral k-variety X. In this paper, we study the reciprocity map $\phi_X : SK_1(X) \to \pi_1^{ab}(X)$ introduced by S. Saito and prove that, assuming the Bloch-Kato conjecture in degree 3 for a prime $l \neq p$ (which is known for $l = 2$), its kernel is uniquely l-divisible for surfaces for which the l-adic cohomology group $H^2(X, \mathbb{Q}_l)$ vanishes (so in particular for those with potentially good reduction). In higher dimension, we derive the same conclusion from a special case of a conjecture by Kato for varieties with good reduction. We also obtain finiteness results for the torsion part of the group $SK_1(X)$. The proofs exploit Voevodsky's motivic cohomology theory to which we furnish some complements in an appendix. In a second appendix, J.-L. Colliot-Thélène shows that the kernel of ϕ_X does indeed contain a huge uniquely divisible subgroup already in the case of curves of genus at least one.

1. Introduction

Soit k un corps p-adique, i. e. une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, et soit X une variété propre, lisse, géométriquement intègre définie sur k. La théorie des corps de classes pour X, introduite dans les travaux de Bloch, Kato et Saito, (cf. [4], [16], [22], [23]) étudie le groupe

$$SK_1(X) := \operatorname{coker}\Big(\bigoplus_{x \in X_1} K_2k(x) \to \bigoplus_{x \in X_0} K_1k(x)\Big)$$

(où X_i veut dire les points de dimension i de X et le morphisme est induit par le symbole modéré) ainsi qu'une application de réciprocité, à valeurs dans l'abélianisé du groupe fondamental étale de X :

$$\phi_X : SK_1(X) \to \pi_1^{ab}(X).$$

Une construction de ϕ_X sera rappelée au début du chapitre suivant; pour l'instant, contentons-nous de quelques-unes de ses propriétés.

Quand X est un point, cette application de réciprocité n'est autre que celle de la théorie des corps de classes locale classique. Dans le cas où X est une variété avec bonne réduction, de fibre spéciale lisse Y, on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} SK_1(X) & \xrightarrow{\phi_X} & \pi_1^{ab}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH_0(Y) & \xrightarrow{\rho_Y} & \pi_1^{ab}(Y) \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont fournis respectivement par les résidus en K-théorie de Milnor et par la théorie de la spécialisation du groupe fondamental, et ρ_Y n'est autre que l'application de réciprocité de Lang [17] définie pour une variété propre lisse sur un corps fini.

Grâce à des travaux de Lang, Kato, Saito, Colliot-Thélène, Sansuc et Soulé, on sait que ρ_Y est une injection et son image est dense. Qu'en est-il pour ϕ_X ? Saito a montré (cf. [22], [23], [24]) que comme on l'attend, l'image est dense dans le cas de bonne réduction, et il a également déterminé le conoyau dans le cas semistable. Par contre, le noyau est beaucoup moins connu et il n'est presque jamais trivial. En effet, considérons l'application norme naturelle $N : SK_1(X) \to k^\times$ induit par les normes $k(x)^\times \to k^\times$ (le passage au quotient est possible d'après une loi de réciprocité de Weil, cf. [4], (1.7)) et notons, suivant Bloch, $V(X)$ son noyau. Comme ϕ_X est fonctorielle pour N, la théorie des corps de classes locale nous apprend (cf. [22], Remark 4.3) que son noyau est contenu dans $V(X)$. D'autre part, Saito a prouvé que $\phi_X(V(X))$ est toujours un groupe fini (cf. les références ci-dessus); ainsi, tout sous-groupe divisible de $V(X)$ est nécessairement contenu dans le noyau de ϕ_X. Or, comme le démontre J.-L. Colliot-Thélène dans l'appendice B, le groupe $V(X)$ contient un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de rang infini déjà pour les courbes de genre au moins 1.

Ainsi, le mieux que l'on puisse attendre est ce que le noyau de ϕ_X soit un groupe *uniquement divisible*. C'est pour son unique l-divisibilité (où $l \neq p$ est un nombre premier) que le présent article apporte des conditions suffisantes. Pour pouvoir les énoncer, nous sommes obligés de faire quelques rappels.

Rappel 1.1. — Pour un entier positif n fixé, il existe un symbole cohomologique (cf. par exemple [31]) définissant, pour tout corps F dans lequel n est inversible et tout entier naturel i, un homomorphisme

$$K_i^M(F)/n \to H^i(F, \mu_n^{\otimes i})$$

(où K_i^M est le i-ième K-groupe de *Milnor*) par cup-produit à partir du cobord de la suite de Kummer associée au nombre n. Une conjecture, le plus souvent attribuée à Bloch et Kato, prédit que c'est toujours un isomorphisme.

> Convention. *Nous dirons qu'un corps F satisfait à l'hypothèse* $\mathbf{BK}(i,l)$ *si la conjecture de Bloch et Kato est vraie pour le i-ième K-groupe de Milnor de F, quand l'entier n figurant dans la définition ci-dessus est une puissance de l.*

Voici les cas où l'énoncé $\mathbf{BK}(i,l)$ est connu pour tous les corps F. Pour $i = 1$, c'est classique (Kummer, Hilbert, Noether) et pour $i = 2$ il a été démontré par Merkouriev et Sousline [18]. Ces auteurs ont également démontré dans [19] (indépendamment de M. Rost, qui n'a pas publié sa démonstration) le cas $i = 3$, $l = 2$. Enfin le cas $l = 2$, i quelconque a été récemment démontré par Voevodsky [36]. Dans cet article, nous n'utiliserons $\mathbf{BK}(i,l)$ que pour $i \leqq 3$ et pour certains corps; pour $i = 3$ seule la surjectivité du symbole cohomologique suffirait.

Notre deuxième rappel concerne une (autre) conjecture de Kato.

Rappel 1.2. — Dans son article fondamental [16], Kato a défini un complexe de groupes abéliens

$$C^{q,i}_{n,S}: \qquad \dots \to \bigoplus_{x\in S_{j+1}} H^{q+j+1}(\kappa(x),\mu_n^{\otimes i+j+1}) \to \bigoplus_{x\in S_j} H^{q+j}(\kappa(x),\mu_n^{\otimes i+j}) \to \dots$$

où i, j, q sont des entiers positifs, S est n'importe quel schéma excellent et n inversible sur S. (On ignore les questions de p-torsion dans cet article ; voir la Remarque 4.2 (2) pourquoi.) Ce complexe généralise le complexe de Bloch-Ogus [6] pour une variété lisse sur un corps. Pour un schéma régulier propre et plat sur l'anneau des entiers O_k d'un corps p-adique k, de fibre générique lisse X et de fibre spéciale Y, la conjecture 5.1 de [16] prédit que le morphisme de spécialisation naturel de $C^{2,1}_{n,X}$ vers l'opposé du complexe $C^{1,0}_{n,Y}$ induit par les morphismes résidus en cohomologie étale est un quasi-isomorphisme. D'autre part, d'après la conjecture 0.3 du même article, si Y est lisse, le complexe $C^{1,0}_{n,Y}$ devrait être acyclique en degrés positifs (le terme en degré i étant la somme indexée par les points de dimension i de X). La combinaison de ces deux conjectures donne :

Conjecture $(\mathbf{K}_n)$. — *Pour une k-variété propre et lisse X ayant bonne réduction, le complexe $C^{2,1}_{n,X}$ est acyclique en degrés positifs.*

Fixons un nombre premier $l \neq p$ et notons $C^{2,1}_{l^\infty,X}$ le complexe obtenu par passage à la limite inductive suivant n à partir des complexes $C^{2,1}_{l^n,X}$. Alors on peut énoncer la conjecture sous la forme plus faible :

Conjecture $(\mathbf{K}_{l^\infty})$. — *Pour une k-variété propre et lisse X ayant bonne réduction, le complexe $C^{2,1}_{l^\infty,X}$ est acyclique en degrés positifs.*

On dira que *la conjecture $(\mathbf{K}_{l^\infty})$ est vraie en degré i* si le complexe en question est acyclique en degré i.

Notre résultat principal s'énonce maintenant comme suit.

Théorème. — *Soit X une variété propre, lisse et géométriquement intègre sur un corps p-adique k. Fixons un nombre premier l différent de p et supposons que les corps résiduels des points de dimension 2 vérifient* $\mathbf{BK}(3,l)$.

Alors le noyau de l'application de réciprocité ϕ_X est **uniquement** *l-divisible dans chacun des cas suivants.*

(1) X a bonne réduction et la conjecture $(\mathbf{K}_{l^\infty})$ de Kato est vérifiée en degré 3.

(2) X est de dimension au plus 2 et le groupe de cohomologie l-adique $H^2(X,\mathbb{Q}_l)$ est trivial.

Le cas des courbes avec bonne réduction était connu avant (combiner [23], Lemma 5.3 avec [10], Proposition 4.6 b)). Mais le théorème fournit *un résultat nouveau et inconditionnel* pour $l = 2$ et X une surface.

Commentons maintenant sur les diverses hypothèses du théorème.

ZUSATZ 1.3. — *L'hypothèse* $H^2(X, \mathbb{Q}_l) = 0$ *dans la partie (2) du Théorème est satisfaite dans les deux cas suivants.*

- X *a potentiellement bonne réduction.*
- $H^2_{Zar}(X, O_X) = 0$ *et la variété de Picard de* X *a potentiellement bonne réduction.*

La démonstration repose sur des arguments de poids essentiellement bien connus. Le cas de bonne réduction figure déjà dans l'article de Soulé [30].

En ce qui concerne la conjecture $(\mathbf{K}_{l^\infty})$ de Kato en degré 3, elle n'est connue pour l'heure actuelle que dans des cas triviaux (par exemple le cas de dimension $\leqq 2$). Pourtant, nous avons tenu à inclure le cas (1) du théorème ici car il montre que la connaissance de la troisième homologie du complexe $C^{2,1}_{l^\infty,X}$ de Kato admet des conséquences importantes pour des variétés de dimension quelconque.

A ce point, remarquons que dans leur article non publié [26], Saito et Salberger démontrent l'injectivité de l'application de réciprocité *modulo* l^n pour des surfaces satisfaisant à des hypothèses semblables, mais apparemment plus fortes que dans la partie (2) du Théorème. Dans des travaux en cours, Jannsen et Saito généralisent ce résultat en utilisant une description générale de l'homologie *en degré 2* du complexe $C^{2,1}_{l^\infty,X}$ de Kato pour les variétés avec réduction semi-stable. Leur approche a l'avantage de couvrir aussi le cas $l = p$, mais les résultats n'excluent pas la présence d'éléments de l-torsion dans le noyau de ϕ_X ; en effet, comme nous venons de le voir, cette question plus forte nécessite des renseignements sur la troisième homologie du complexe de Kato.

Le théorème admet la conséquence suivante concernant le noyau $V(X)$ de la norme $SK_1(X) \to k^\times$:

COROLLAIRE 1.4. — *Soit* X *une variété satisfaisant aux hypothèses du Théorème, et supposons que les corps résiduels de ses points de dimension 2 vérifient* $\mathbf{BK}(3, l)$ *pour* **tout** $l \neq p$. *Alors le groupe* $V(X)$ *est extension d'un groupe fini par un groupe uniquement divisible premier à* p.

En effet, on sait que le groupe $V(X)$ est extension d'un groupe de torsion par un groupe divisible. Cela a été démontré par Saito dans le cas des courbes (cf. [23], Cor. 5.2 (2) et aussi [22], Cor. 4.15) ; le cas général s'y réduit par un argument de Bertini comme dans la démonstration de [8], Proposition 3.3. Ainsi, l'énoncé du Théorème est *équivalent* à l'injectivité de la restriction de ϕ_X à la torsion l-primaire de $V(X)$. Mais la torsion l-primaire de $\pi_1^{ab}(X)$ est finie et nulle pour presque tout l ([22], pp. 126–129), d'où le corollaire.

Voici le contenu des divers chapitres. Au chapitre 2 nous donnons la démonstration du Théorème modulo le coeur technique du travail, la Proposition 2.2. La démonstration de celle-ci, qui repose sur la théorie des complexes motiviques de Voevodsky, est exposée au chapitre 3. Le chapitre suivant est consacré à la démostration du Zusatz 1.3 et le chapitre 5 contient quelques résultats de finitude non couverts par le corollaire 1.4 pour la torsion l-primaire dans SK_1 d'une surface, certains valables même pour $l = p$. Outre l'appendice B de Colliot-Thélène déjà mentionné, il y en a un autre qui joue un double rôle : d'une part, il traduit les résultats du chapitre 3 dans le langage plus classique de la K-théorie ; d'autre part, il clarifie un détail technique dans la démonstration du lemme 3.3.

Toute ma reconnaissance à Jean-Louis Colliot-Thélène pour son encouragement permanent, pour ses remarques pertinentes et pour son joli appendice. Je voudrais également remercier Uwe Jannsen pour son intérêt dans ce travail et Bruno Kahn pour ses commentaires sur une première version. Une grande partie de ce travail a été effectuée dans l'environnement luxueux de l'Isaac Newton Institute de l'Université de Cambridge que je remercie pour son hospitalité.

2. Démonstration du théorème : partie arithmétique

Commençons par rappeler une construction de l'application de réciprocité ϕ_X. Celle qui est la plus adaptée à nos besoins a son origine dans le travail de Bloch [4] et est décrite en détail dans [22], 4.1 ; en voici un résumé.

Il suffit de définir des morphismes compatibles $SK_1(X) \to \pi_1^{ab}(X)/m$ pour tout entier positif m ; l'application de réciprocité s'obtient alors par passage à la limite sur m. Vu l'isomorphisme canonique $\pi_1^{ab}(X)/m \cong \mathrm{Hom}(H^1_{ét}(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, il suffit en fait de définir des morphismes

$$\phi_{X,m} : SK_1(X) \to H^{2d+1}_{ét}(X, \mu_m^{\otimes d+1})$$

par le théorème de dualité bien connue suivante (cf. [22], th. 1.14 ainsi que [25]) :

Rappel 2.1. — Soit V une variété propre, lisse, géométriquement intègre, de dimension d sur un corps local k, et m un entier positif inversible dans k. Alors on dispose d'un morphisme trace

$$H^{2d+2}_{ét}(V, \mu_m^{\otimes d+1}) \to \mathbb{Z}/m$$

obtenu comme le composé de l'application de Hochschild-Serre

$$H^{2d+2}_{ét}(V, \mu_m^{\otimes d+1}) \to H^2(k, H^{2d}_{ét}(\overline{V}, \mu_m^{\otimes d}) \otimes \mu_m)$$

avec le morphisme trace de la dualité de Poincaré pour $\overline{V} = V \times \overline{k}$ et l'invariant du groupe de Brauer de k. C'est un isomorphisme par définition, et on montre que les accouplements

$$H^i_{ét}(V, \mu_m^{\otimes j}) \times H^{2d+2-i}_{ét}(V, \mu_m^{\otimes d+1-j}) \to \mathbb{Z}/m$$

obtenus en composant le cup-produit en cohomologie étale avec cette trace sont parfaits.

Maintenant, pour définir $\phi_{X,m}$ on peut procéder de plusieurs manières équivalentes. Par exemple, remarquons que comme le symbole cohomologique est compatible avec les morphismes résidus en K-théorie de Milnor et en cohomologie étale (cf. par exemple [21], Appendice A), il définit un morphisme

$$SK_1(X) \to \mathrm{coker}\Big(\bigoplus_{x \in X_1} H^2(k(x), \mu_m^{\otimes 2}) \to \bigoplus_{x \in X_0} H^1(k(x), \mu_m)\Big).$$

Or la forme de la suite spectrale de coniveau (cf. par exemple [9]) dans cette situation montre que le conoyau à droite s'envoie dans $H^{2d+1}_{\acute{e}t}(X, \mu_m^{\otimes d+1})$. De façon équivalente, par la théorie de Bloch et Ogus ([6], [9]) on peut identifier le conoyau en question au groupe de cohomologie de Zariski $H^d_{Zar}(X, \mathbf{R}^{d+1}\pi_*\mu_m^{\otimes d+1})$, où d est la dimension de X et π est la projection du grand site étale de k au grand site Zariski de k. Comme la dimension cohomologique de X_{Zar} est d, on peut composer par un morphisme bord provenant de la suite spectrale de Leray associée à π, et on obtient $\phi_{X,m}$. (Notons que ces constructions peuvent s'effectuer au-dessus d'un corps de base k quelconque pour m inversible dans k.)

Après tous ces rappels, on peut énoncer la proposition suivante dont la démonstration est reportée au chapitre 3.

Proposition 2.2. — *Soit X une variété lisse de dimension d sur un corps de caractéristique zéro. Supposons que les corps résiduels des points de dimension 2 de X vérifient $\mathbf{BK}(3, l)$ pour un nombre premier l fixé. Alors pour tout entier positif n, on a les énoncés suivants.*

(1) Il existe une surjection

$$H^{2d}_{Zar}(X, \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) \twoheadrightarrow {}_{l^n}SK_1(X).$$

Ici, le morphisme $\pi : k_{\acute{e}t} \to k_{Zar}$ est le changement de site déjà vu plus haut, $\tau_{\leqq}$ est la troncation "sophistiquée", et pour un groupe abélien A, le symbole ${}_{l^n}A$ désigne son sous-groupe de l^n-torsion.

(2) Cette surjection s'insère dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^{2d}_{Zar}(X, \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \twoheadrightarrow & {}_{l^n}SK_1(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{2d}_{\acute{e}t}(X, \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \longrightarrow & H^{2d+1}_{\acute{e}t}(X, \mu_{l^m}^{\otimes d+1}) \end{array}$$

Ici le morphisme vertical de droite est la restriction à ${}_{l^n}SK_1(X)$ du morphisme ϕ_{X,l^m} construit plus haut. Celui de gauche est induit par la version "catégories dérivées" de la suite spectrale de Leray (cf. [37], cor. 10.8.3), composée par l'"oubli de la troncation"; celui du bas est le morphisme de Bockstein en cohomologie étale associé à la suite exacte de faisceaux

$$1 \to \mu_{l^m}^{\otimes d+1} \to \mu_{l^{m+n}}^{\otimes d+1} \to \mu_{l^n}^{\otimes d+1} \to 1.$$

Remarques 2.3. (1) Le diagramme de la proposition s'inspire de celui figurant dans la Proposition 1 de Colliot-Thélène, Sansuc et Soulé [12].

(2) On peut identifier le noyau du morphisme dans la partie (1) de la Proposition 2.2 au quotient modulo l^n du groupe de $\mathcal{K}$-cohomologie $H^{d-1}_{Zar}(X, \mathcal{K}^M_{d+1})$, obtenant ainsi des

analogues de résultats bien connus de Bloch [5] et de Sousline [31] sur la torsion dans le groupe de Chow de codimension deux ; cf. là-dessus l'Appendice A.

(3) Si X est une surface, le groupe $H^{2d}_{Zar}(X, \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1})$ figurant dans la proposition s'identifie au groupe $NH^4(X, \mu_{l^n}^{\otimes 3})$ défini comme le noyau du morphisme de restriction

$$H^4_{ét}(X, \mu_{l^n}^{\otimes 3}) \to H^4_{ét}(k(X), \mu_{l^n}^{\otimes 3}).$$

Cela résulte immédiatement du triangle distingué fondamental (dans $\mathbf{D}^b(X_{Zar})$, la catégorie dérivée des complexes cohomologiquement bornés de faisceaux de Zariski sur X) :

$$\tau_{\leqq 3}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes 3} \to \tau_{\leqq 4}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes 3} \to \mathbf{R}^4\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes 3}[-4] \to \tau_{\leqq 3}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes 3}[1]$$

joint à la théorie de Bloch-Ogus, et sert de base pour la démonstration des résultats de finitude exposés au chapitre 5.

Par passage à la limite inductive suivant n et à la limite projective suivant m dans l'énoncé (2) de la Proposition 2.2, on obtient le

Corollaire 2.4. — *Sous les hypothèses de la Proposition 2.2, on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} H^{2d}_{Zar}(X, \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d+1)) & \twoheadrightarrow & SK_1(X)\{l\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{2d}_{ét}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d+1)) & \longrightarrow & H^{2d+1}(X, \mathbb{Z}_l(d+1))\{l\} \end{array}$$

Ici, le groupe $A\{l\}$ est le sous-groupe de torsion l-primaire du groupe abélien A. Sur un corps p-adique, le groupe en bas à droite est isomorphe à $\pi_1^{ab}(X)\{l\}$ et le morphisme qu'il reçoit n'est autre que ϕ_X restreint à $SK_1(X)\{l\}$.

Ce corollaire donne la clé à la *démonstration du Théorème* énoncé dans l'Introduction. En effet, nous avons vu lors de la démonstration du cor. 1.4 que l'assertion du Théorème équivaut à l'injectivité de la restriction de ϕ_X à la torsion l-primaire de $V(X)$, ou encore, grâce à la théorie des corps de classes locale, à celle de $SK_1(X)$. Un examen du diagramme figurant dans le Corollaire 2.4 montre alors que pour cela il suffit d'établir l'injectivité du morphisme de gauche ainsi que de celui du bas sous les hypothèses imposées. C'est le contenu des deux lemmes suivants.

Lemme 2.5. — *Si X est une variété propre, lisse, de dimension d définie sur un corps p-adique k ayant bonne réduction et satisfaisant à la conjecture $(\mathbf{K}_{l^\infty})$ en degré 3, le morphisme*

$$H^{2d}_{Zar}(X, \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d+1)) \to H^{2d}_{ét}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d+1))$$

est injectif. Si $d \leqq 2$, on arrive à la même conclusion sous la seule hypothèse que X est lisse sur un corps de caractéristique zéro.

Démonstration. Le cas des courbes est tautologique et celui des surfaces résulte de la démonstration de la partie (3) de la Remarque 2.3. Pour $d \geqq 3$, remarquons d'abord que k étant un corps p-adique, la dimension cohomologique d'un ouvert affine de X est $d+2$ et a fortiori pour tout n, le complexe $\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}$ est acyclique en degrés supérieurs à $d+2$. Donc on a un triangle distingué dans $\mathbf{D}^b(X_{Zar})$:

$$\tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1} \to \mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1} \to \mathbf{R}^{d+2}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}[-d-2] \to \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}[1]$$

d'où une suite exacte longue :

$$\begin{aligned} H_{ét}^{2d-1}(X, \mu_{l^n}^{\otimes d+1})) &\to H_{Zar}^{d-3}(X, \mathbf{R}^{d+2}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) \\ &\to H_{Zar}^{2d}(X, \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) \to H_{ét}^{2d}(X, \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) \end{aligned}$$

et, par passage à la limite inductive suivant n,

$$\begin{aligned} H_{ét}^{2d-1}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d+1))) &\to H_{Zar}^{d-3}(X, \mathbf{R}^{d+2}\pi_*\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d+1)) \\ &\to H_{Zar}^{2d}(X, \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d+1)) \to H_{ét}^{2d}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d+1)). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que le groupe $H_{Zar}^{d-3}(X, \mathcal{H}^{d+2}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d+1)))$ est trivial. Mais par la théorie de Bloch et Ogus, ledit groupe s'identifie à l'homologie en degré 3 du complexe $C_{l^\infty,X}^{2,1}$ de Kato introduit dans le Rappel 1.2. Par hypothèse, cette homologie est triviale, d'où le lemme.

Lemme 2.6. — *Soit X une variété propre, lisse, de dimension d définie sur un corps p-adique k et soit l un nombre premier. Alors le morphisme de Bockstein*

$$H^{2d}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(d+1)) \to H^{2d+1}(X, \mathbb{Z}_l(d+1))$$

est injectif si et seulement si $H^2(X, \mathbb{Q}_l) = 0$.

Remarquons qu'en vertu du Zusatz 1.3, la condition du Lemme est satisfaite en particulier quand X a bonne réduction. Cette observation est nécessaire pour compléter la démonstration de la partie (1) du Théorème.

Avant de démontrer le lemme, rappelons une compatibilité standard entre cup-produits et cobords en cohomologie des faisceaux.

Rappel 2.7. — Étant donné une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

sur un site et un faisceau $\mathcal{G}$ tel que la suite

$$0 \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{F}'' \otimes \mathcal{G} \to 0$$

reste exacte, si on note d_1 le cobord en cohomologie provenant de la première suite et d celui provenant de la deuxième on a la formule standard $d(\alpha \cup \beta) = (d_1\alpha) \cup \beta$ pour $\alpha \in H^i(\mathcal{F}'')$ et $\beta \in H^j(\mathcal{G})$. Ceci est une conséquence de la prop. 2.2 de Gamst et Hoechsmann [14].

Démonstration du lemme 2.6. Il est facile à vérifier que la condition d'exactitude du Rappel 2.7 est satisfaite par les suite exactes courtes du type

$$1 \to \mu_{l^n}^{\otimes i} \to \mu_{l^{n+m}}^{\otimes i} \to \mu_{l^m}^{\otimes i} \to 1 \tag{2.8}$$

et les faisceaux $\mathcal{G} = \mu_{l^n}^{\otimes d+1-i}$. En appliquant le rappel deux fois (avec $i = 0$ et $i = d+1$) et la dualité arithmétique 2.1, on obtient une dualité entre les morphismes de Bockstein

$$H^{2d}(X, \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) \to H^{2d+1}(X, \mu_{l^m}^{\otimes d+1}) \quad \text{et} \quad H^1(X, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}).$$

Par passage à la limite inductive suivant n et à la limite projective suivant m, il s'ensuit que le morphisme du lemme est le dual du morphisme de Bockstein

$$H^1(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l) \to H^2(X, \mathbb{Z}_l) \tag{2.9}$$

qui s'insère dans la suite exacte

$$H^1(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l) \to H^2(X, \mathbb{Z}_l) \to H^2(X, \mathbb{Q}_l) \to H^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)$$

obtenue par passage à la limite à partir de la suite exacte longue associée à (2.8) avec $i = 0$. (Notons que le passage à la limite projective nécessite, comme dans [12], p. 774, la connaissance de la finitude des groupes $H^i(X, \mathbb{Z}/l^j\mathbb{Z})$ sur un corps p-adique, cf. là-dessus la démonstration de la prop. 5.2 *infra*). On en déduit que le morphisme (2.9) est surjectif si et seulement si $H^2(X, \mathbb{Q}_l) = 0$, car $H^2(X, \mathbb{Q}_l)$ est uniquement divisible et $H^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)$ est de torsion.

3. Démonstration du théorème : partie motivique

Ce chapitre est consacré à la démonstration de la proposition 2.2 à l'aide de la cohomologie motivique développée par Voevodsky et Sousline. Les résultats sont valables sur n'importe quel corps de base k de caractéristique zéro.

Voevodsky a introduit (cf. par exemple [33], chap. 3) pour tout entier j, un complexe de faisceaux abéliens $\mathbb{Z}(j)$ sur le sous-site du grand site Zariski de k formé des schémas lisses, vérifiant un grand nombre de propriétés prédites par Beilinson dans [3]. Notamment, les complexes $\mathbb{Z}(j)$ sont acycliques en degrés supérieurs à j mais l'on ignore pour l'instant s'ils sont acycliques en degrés négatifs.

Remarque pédante 3.1. Le fait que l'on ne sache pas si les complexes $\mathbb{Z}(j)$ sont cohomologiquement bornés pose un problème pour le calcul de leur hypercohomologie de Zariski. Mais localement sur un schéma X de dimension cohomologique finie, c'est toujours possible (cf. [37], cor. 10.5.11), et c'est le seul cas que l'on va rencontrer dans la suite. Donc à de telles occasions il faudra toujours sous-entendre que les considérations sont faites sur le petit site Zariski de X.

En basses dimensions, on a :

$$\mathbb{Z}(j) = 0 \quad \text{pour } j < 0,$$

et des quasi-isomorphismes de complexes de faisceaux

$$\mathbb{Z}(0) \simeq \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}(1) \simeq \mathbb{G}_m[-1].$$

Notons $\mathbb{Z}/l^n(j)$ le produit tensoriel $\mathbb{Z}(j) \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Z}(j)$ est un complexe de groupes abéliens sans torsion, la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{l^n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \to 0$$

donne lieu à un triangle distingué

$$\mathbb{Z}(j) \xrightarrow{l^n} \mathbb{Z}(j) \to \mathbb{Z}/l^n(j) \to \mathbb{Z}(j)[1]$$

dans la catégorie dérivée des faisceaux sur le sous-site du grand site Zariski de k formé des schémas lisses, qui sera notée $\mathbf{D}(Sm(k)_{Zar})$ dans la suite.

En considérant la suite exacte longue associée en cohomologie de Zariski pour $j = d+1$, on obtient le

LEMME 3.2. — *Pour une variété lisse X de dimension d sur k, il existe une suite exacte :*

$$0 \to H^{2d}_{Zar}(X, \mathbb{Z}(d+1))/l^n \to H^{2d}_{Zar}(X, \mathbb{Z}/l^n(d+1)) \to {}_{l^n}H^{2d+1}_{Zar}(X, \mathbb{Z}(d+1)) \to 0.$$

La Proposition 2.2 (1) est maintenant une conséquence de ce résultat en vertu du

LEMME 3.3. — *Supposons que l'hypothèse $\mathbf{BK}(3,l)$ soit vérifiée pour les corps résiduels des points de dimension 2 de X. Alors on dispose d'isomorphismes canoniques :*

$$a) \qquad H^{2d+1}_{Zar}(X, \mathbb{Z}(d+1)) \cong SK_1(X);$$
$$b) \qquad H^{2d}_{Zar}(X, \mathbb{Z}/l^n(d+1)) \cong H^{2d}_{Zar}(X, \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}).$$

L'hypothèse $\mathbf{BK}(3,l)$ ne sert en fait que dans la partie b) du lemme. Avant de commencer la démonstration, rappelons la construction du “symbole cohomologique” de Sousline et Voevodsky [33]. La présentation doit beaucoup aux remarques de B. Kahn et E. Peyre; la version révisée de [33] en adopte une autre, équivalente à celle figurant ci-dessous.

Rappel 3.4. — Nous construisons pour tout j et n un morphisme

$$\mathbb{Z}/l^n(j) \to \tau_{\leqq j}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes j}$$

dans $\mathbf{D}(Sm(k)_{Zar})$. Comme $\mathbb{Z}/l^n(j)$ n'a pas de cohomologie en degrés $> j$, il revient au même de définir un morphisme

$$\mathbb{Z}/l^n(j) \to \mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes j}.$$

Pour la réduction suivante, remarquons que le foncteur de changement de site π^* étant exact ([20], Lemma II.2.6. et p. 68), il est l'adjont à gauche de $\mathbf{R}\pi_*$, et il suffit donc de définir un morphisme

$$\pi^*\mathbb{Z}/l^n(j) \to \mu_{l^n}^{\otimes j}$$

dans la catégorie $\mathbf{D}(Sm(k)_{ét})$ définie de façon analogue à $\mathbf{D}(Sm(k)_{Zar})$. Commençons par construire ce morphisme pour $j = 1$.

Par la prop. 2.2 de [33] on dispose d'un isomorphisme $\mathbb{Z}(1) \cong \mathbb{G}_m[-1]$ dans $\mathbf{D}(Sm(k)_{Zar})$, d'où, par l'exactitude de π^*, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi^*\mathbb{Z}(1) \arrow[r, "l^n"'] \arrow[d, "\cong"] & \pi^*\mathbb{Z}(1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi^*\mathbb{Z}/l^n(1) \arrow[r] & \pi^*\mathbb{Z}(1)[1] \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbb{G}_m[-1] \arrow[r, "l^n"'] & \mathbb{G}_m[-1] \arrow[r] & \mu_{l^n} \arrow[r] & \mathbb{G}_m
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont des triangles distingués de $\mathbf{D}(Sm(k)_{ét})$, celui du bas étant donné notamment par la théorie de Kummer en cohomologie étale. Une propriété de base des catégories triangulées implique alors que le morphisme vertical manquant au milieu existe (c'est d'ailleurs un isomorphisme par le lemme des cinq).

Or les objets $\pi^*\mathbb{Z}/l^n(j)$ et $\mu_{l^n}^{\otimes j}$ vivent en effet dans une certaine sous-catégorie pleine $DM_{ét}^{-,eff}(k)$ de $\mathbf{D}(Sm(k)_{ét})$ qui a été construite dans [34] par Voevodsky. S'agissant d'une sous-catégorie pleine, le morphisme pour $j = 1$ que l'on vient de construire est un morphisme de $DM_{ét}^{-,eff}(k)$. Or dans $DM_{ét}^{-,eff}(k)$ le complexe $\pi^*Z/l^n(j)$ se décompose comme un produit

$$\pi^*\mathbb{Z}/l^n(j) = \pi^*\mathbb{Z}/l^n(1) \overset{V}{\otimes} \dots \overset{V}{\otimes} \pi^*\mathbb{Z}/l^n(1) \qquad (j \text{ fois}),$$

où $\otimes^V$ est le produit tensoriel de $DM_{ét}^{-,eff}(k)$ (cf. [36], démonstration du th. 2.6), donc on peut définir un morphisme

$$\pi^*\mathbb{Z}/l^n(j) \to \mu_{l^n}^{\otimes^V j}$$

par élévation à la puissance V-tensorielle. Mais $\mu_{l^n}^{\otimes^V j} \simeq \mu_{l^n}^{\otimes j}$, car l'inclusion de $DM_{ét}^{-,eff}(k)$ dans la catégorie dérivée des faisceaux étales avec transferts admet un adjoint à gauche respectant la structure tensorielle (cf. [34], bas de la page 25 pour l'énoncé analogue sur le site Nisnevich) et $\mu_{l^n}^{\otimes j}$ est lui-même un faisceau étale avec transferts.

Démonstration du lemme 3.3. Pour établir a), commençons par remarquer que la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_2^{p,q} = H^p_{Zar}(X, \mathcal{H}^q\mathbb{Z}(j)) \Rightarrow H^{p+q}_{Zar}(X, \mathbb{Z}(j))$$

fournit un morphisme

$$\rho_{i,j} : \ H^i_{Zar}(X, \mathbb{Z}(j)) \to H^{i-j}_{Zar}(X, \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j))$$

par l'acyclicité de $\mathbb{Z}(j)$ en degrés $> j$. De plus, pour $i = 2d+1$ et $j = d+1$ on obtient ainsi un isomorphisme

$$H^{2d+1}_{Zar}(X, \mathbb{Z}(d+1)) \overset{\cong}{\to} H^d_{Zar}(X, \mathcal{H}^{d+1}\mathbb{Z}(d+1))$$

car X est de dimension cohomologique d. D'autre part, Voevodsky a construit une "résolution de Gersten" par des faisceaux flasques :

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{H}^{d+1}\mathbb{Z}(d+1) \to & \bigoplus_{x\in X^0} i_{x*}\mathcal{H}^{d+1}\mathbb{Z}(d+1)_x \to \\ & \to \bigoplus_{x\in X^1} i_{x*}\mathcal{H}^{d}\mathbb{Z}(d)_x \to \dots \to \bigoplus_{x\in X^d} i_{x*}\mathcal{H}^{1}\mathbb{Z}(1)_x \to 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

où i_x est l'inclusion du point x. Son existence résulte du th. 4.37 de [35], valable sur un corps quelconque, appliquée au faisceau $\mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)$ qui est un "faisceau avec transferts invariant par homotopie", et du quasi-isomorphisme $\mathbb{Z}(j)_{-1}[1] \simeq \mathbb{Z}(j-1)$ de ([36], th. 2.1) qui pour l'heure n'est établi que sur les corps où l'on dispose de la résolution des singularités sous une forme forte, donc pour l'instant en caractéristique zéro grâce à Hironaka. (Voir l'Appendice A pour plus de détails.) Il suffit maintenant de calculer le groupe $H^d_{Zar}(X, \mathcal{H}^{d+1}\mathbb{Z}(d+1))$ en utilisant cette résolution, tenant compte du fait que le th. 3.4 de [33] fournit des isomorphismes canoniques

$$H^1(F, \mathbb{Z}(1)) \cong F^* \quad \text{et} \quad H^2(F, \mathbb{Z}(2)) \cong K_2(F)$$

pour un corps F quelconque.

Pour que cette démonstration soit complète, il faut vérifier encore que le morphisme

$$\bigoplus_{x\in X_1} K_2(k(x)) \to \bigoplus_{x\in X_0} K_1(k(x))$$

ainsi obtenu est bien celui induit par le symbole modéré, comme dans la définition de $SK_1(X)$. Comme cette vérication est quelque peu technique, elle est laissée à l'Appendice A (cf. la proposition plus générale A.4).

Passons maintenant à la démonstration de la partie b). Si l'on suppose que l'hypothèse $\mathbf{BK}(d+1,l)$ soit satisfaite pour tout corps F (où, rappelons-le, d est la dimension de X), le résultat principal de [33] (Theorem 7.4) dit que le symbole cohomologique que l'on a construit dans 3.4 est toujours un isomorphisme pour $j = d+1$ si k est un corps sur lequel la résolution des singularités est connue, ce qui donne immédiatement le résultat. Comme nous avons mis des hypothèses plus douces, nous sommes obligés de dévisser.

Appliquons donc la suite spectrale d'hypercohomologie aux deux groupes figurant dans l'énoncé. Comme dans a), tenant compte de la dimension cohomologique de X_{Zar}, de l'acyclicité de $\mathbb{Z}/l^n(d+1)$ en degrés $> d+1$ ainsi que de la forme de la résolution de Gersten, on vérifie que la suite spectrale nous fournit par dégénérescence un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & H^d_{Zar}(X, \mathcal{H}^d\mathbb{Z}/l^n(d+1)) & \to & H^{2d}_{Zar}(X, \mathbb{Z}/l^n(d+1)) & \to & H^{d-1}_{Zar}(X, \mathcal{H}^{d+1}\mathbb{Z}/l^n(d+1)) & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & H^d_{Zar}(X, \mathbf{R}^d\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \to & H^{2d}_{Zar}(X, \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \to & H^{d-1}_{Zar}(X, \mathbf{R}^{d+1}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \to 0
\end{array}$$

Nous affirmons que sous les hypothèses du lemme, les morphismes verticaux aux deux extrémités sont des isomorphismes, ce qui suffit pour conclure. Vérifions cet isomorphisme dans le cas du morphisme vertical de droite (celui de gauche se traite de façon analogue). En utilisant les résolutions de Gersten-Voevodsky et de Bloch-Ogus, nous obtenons ce morphisme comme le morphisme induit sur l'homologie des complexes figurant dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\bigoplus_{x\in X_2} H^3(k(x), \mathbb{Z}/l^n(3)) & \to & \bigoplus_{x\in X_1} H^2(k(x), \mathbb{Z}/l^n(2)) & \to & \bigoplus_{x\in X_0} H^1(k(x), \mathbb{Z}/l^n(1)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{x\in X_2} H^3(k(x), \mu_{l^n}^{\otimes 3}) & \to & \bigoplus_{x\in X_1} H^2(k(x), \mu_{l^n}^{\otimes 2}) & \to & \bigoplus_{x\in X_0} H^1(k(x), \mu_{l^n})
\end{array}$$

En effet, on vérifie, en utilisant la compatibilité aux produits (cf. la démonstration du lemme A.7), que le symbole cohomologique de Sousline-Voevodsky induit des symboles cohomologiques sur les termes des résolutions de Gersten. La commutativité du diagramme résulte de la proposition A.4 et de la compatibilité usuelle entre résidus en K-théorie de Milnor et en cohomologie étale déjà citée au début du chap. 2; alternativement, elle se vérifie par la méthode de démostration de la prop. A.4.Le diagramme commute car les trois morphismes verticaux peuvent être écrits comme des morphismes composés des isomorphismes de Sousline-Voevodsky (résultant du th. 3.4 de [33])

$$H^i(k(x), \mathbb{Z}/l^n(i)) \overset{\cong}{\to} K_i(k(x))/l^n$$

avec les symboles cohomologiques usuels

$$K_i(k(x))/l^n \to H^i(k(x), \mu_{l^n}^{\otimes i})$$

(la vérification de ce fait se réduit immédiatement au cas trivial $i = 1$ par compatibilité des deux symboles aux produits) et ces symboles sont compatibles aux résidus – le premier, comme on l'a déjà cité, en vertu de la prop. A.4 de l'Appendice A. Par le rappel 1.1 et par hypothèse, le deuxième symbole est également un isomorphisme pour $i = 1, 2$ ainsi que pour $i = 3$ et x un point de dimension 2. Donc on obtient bien un isomorphisme sur l'homologie, ce qui était à voir.

Remarque 3.6. L'utilisation de la résolution des singularités pour construire la résolution de Gersten-Voevodsky est la raison pourquoi l'on ignore dans cet article le cas de la caractéristique $p > 0$.

Le reste de ce chapitre est consacré à la *démonstration de la proposition 2.2 (2)*. Comme on l'a déjà remarqué, un diagramme de même allure figure dans [12], prop. 1, mais l'utilisation de la cohomologie motivique rend la vérification de sa commutativité beaucoup moins fatigante.

De fait, tenant compte des identifications introduites lors de la démonstration précédente, il suffit de vérifier la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} H^{2d}_{Zar}(X, \mathbb{Z}/l^n(d+1)) & \to & H^{2d+1}_{Zar}(X, \mathbb{Z}(d+1)) & \to & H^{2d+1}_{Zar}(X, \mathbb{Z}/l^m(d+1)) \\ \downarrow \cong & & & & \downarrow \\ H^{2d}_{Zar}(X, \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & & & & H^{2d+1}_{Zar}(X, \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^m}^{\otimes d+1}) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ H^{2d}_{ét}(X, \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & & \longrightarrow & & H^{2d+1}_{ét}(X, \mu_{l^m}^{\otimes d+1}) \end{array} \tag{3.7}$$

Il convient peut-être de dire quelques mots sur l'identification de l'application de réciprocité au composé des morphismes figurant dans la moitié droite de ce diagramme. Tenant compte de l'isomorphisme

$$H^{2d+1}_{Zar}(X, \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^m}^{\otimes d+1}) \cong H^d_{Zar}(X, \mathcal{H}^{d+1}(\mu_{l^m}^{\otimes d+1}))$$

résultant du fait que X est de dimension cohomologique d, il suffit de voir que le morphisme naturel

$$SK_1(X) \to \operatorname{coker}\Big(\bigoplus_{x \in X_1} H^2(k(x), \mu_m^{\otimes 2}) \to \bigoplus_{x \in X_0} H^1(k(x), \mu_m)\Big)$$

s'identifie bien au morphisme composé

$$H^{2d+1}_{Zar}(X,\mathbb{Z}(d+1)) \to H^{2d+1}_{Zar}(X,\mathbb{Z}/l^m(d+1)) \to H^{2d+1}_{Zar}(X,\tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^m}^{\otimes d+1})$$

via les diverses résolutions de Gersten. Mais on vient de la voir lors de la démonstration du lemme 3.3 *b*).

Pour l'étape suivante, nous avons besoin d'une petite digression sur les morphismes de Bockstein.

La suite exacte de groupes abéliens

$$0 \to \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/l^{m+n}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \to 0 \tag{3.8}$$

donne lieu, par torsion avec la $(d+1)$-ième puissance tensorielle du caractère cyclotomique, à une suite exacte de faisceaux sur $X_{ét}$:

$$1 \to \mu_{l^m}^{\otimes d+1} \to \mu_{l^{m+n}}^{\otimes d+1} \to \mu_{l^n}^{\otimes d+1} \to 1,$$

d'où un triangle distingué dans $\mathbf{D}(X_{Zar})$:

$$\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^m}^{\otimes d+1} \to \mathbf{R}\pi_*\mu_{l^{m+n}}^{\otimes d+1} \to \mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1} \to \mathbf{R}\pi_*\mu_{l^m}^{\otimes d+1}[1],$$

dont le dernier morphisme est la version "catégories dérivées" du morphisme de Bockstein. Il induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
H^{2d}_{Zar}(X,\tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \longrightarrow & H^{2d+1}_{Zar}(X,\tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^m}^{\otimes d+1}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^{2d}_{Zar}(X,\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \longrightarrow & H^{2d+1}_{Zar}(X,\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^m}^{\otimes d+1}) \\
\downarrow{\cong} & & \downarrow{\cong} \\
H^{2d}_{ét}(X,\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \longrightarrow & H^{2d+1}_{ét}(X,\mu_{l^m}^{\otimes d+1})
\end{array}$$

où les isomorphismes indiqués sont donnés par la version de Verdier de la suite spectrale de Leray. D'autre part, en tensorisant la suite exacte (3.7) par le complexe $\mathbb{Z}(d+1)$, on trouve le triangle distingué de $\mathbf{D}(Sm(k)_{Zar})$:

$$\mathbb{Z}/l^m(d+1) \to \mathbb{Z}/l^{m+n}(d+1) \to \mathbb{Z}/l^n(d+1) \to \mathbb{Z}/l^m(d+1)[1]$$

dont le dernier morphisme est le Bockstein pour la cohomologie motivique qui s'insère dans le diagramme commutatif évident :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/l^n(d+1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/l^m(d+1)[1] \\ \downarrow & & \downarrow = \\ \mathbb{Z}(d+1)[1] & \longrightarrow & \mathbb{Z}/l^m(d+1)[1] \end{array}$$

A fortiori, on peut remplacer la première ligne du diagramme (3.6) par le morphisme de Bockstein

$$H^{2d}_{Zar}(X, \mathbb{Z}/l^n(d+1)) \to H^{2d+1}_{Zar}(X, \mathbb{Z}/l^m(d+1))$$

et on est réduit à vérifier la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H^{2d}_{Zar}(X, \mathbb{Z}/l^n(d+1)) & \longrightarrow & H^{2d+1}_{Zar}(X, \mathbb{Z}/l^m(d+1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{2d}_{Zar}(X, \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \longrightarrow & H^{2d+1}_{Zar}(X, \tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^m}^{\otimes d+1}) \end{array}$$

C'est une conséquence du lemme plus général suivant :

Lemme 3.9. — *Le symbole cohomologique de Sousline-Voevodsky et les morphismes de Bockstein induisent, pour tout entier positif j, un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/l^n(j) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/l^m(j)[1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau_{\leqq j}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes j} & \longrightarrow & \tau_{\leqq j}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^m}^{\otimes j}[1] \end{array}$$

dans $\mathbf{D}(Sm(k)_{Zar})$.

Démonstration. Tenant compte de la construction rappelée dans 3.4, l'assertion est immédiate pour $j = 1$. Le cas général s'y réduit par la compatibilité des cup-produits en cohomologie étale avec les morphismes de Bockstein (cf. début de la démonstration du lemme 2.6).

4. Démonstration du Zusatz 1.3

On va démontrer les deux énoncés parallèlement. Par la suite spectrale de Hochschild-Serre (pour la cohomologie continue), il suffit de montrer que les hypothèses du Zusatz impliquent les trois annulations :

a) $H^2(k, H^0(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)) = H^2(k, \mathbb{Q}_l) = 0$;
b) $H^1(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)) = 0$;
c) $H^0(k, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)) = 0$.

Quitte à passer à une extension finie de k, on peut effacer le mot "potentiellement" dans les hypothèses en utilisant un argument de transfert.

Pour *a*), remarquons que $H^2(k, \mathbb{Z}_l)$ est dual à $H^0(k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))$ par la dualité de Tate locale, et ce dernier groupe est fini car k ne contient qu'un nombre fini de racines de l'unité. Mais par définition $H^2(k, \mathbb{Q}_l) = H^2(k, \mathbb{Z}_l) \otimes \mathbb{Q}_l$.

Passons à l'assertion *b*). Notons G le groupe de Galois absolu de k. Comme la caractéristique d'Euler-Poincaré du G-module $H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)$ est nulle pour $l \neq p$ (cela résulte après passage à la limite de [29], II.5.4, prop. 17), il suffit de démontrer la nullité des groupes $H^0(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l))$ et $H^2(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l))$. Pour le deuxième groupe, on a la chaîne d'isomorphismes (où $*$ veut dire le $\mathbb{Q}_l$-espace vectoriel dual) :

$$\begin{aligned} H^2(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)) &\cong H^0(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)^*(1))^* \cong \\ &\cong H^0(k, H^{2d-1}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)(d+1))^* \cong H^0(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(2)))^* \end{aligned}$$

Ici, le premier isomorphisme est donné par la dualité de Tate (cf. la première remarque ci-après), le deuxième par celle de Poincaré et le troisième par le théorème de Lefschetz vache (cf. [13], 4.1.1). (Cet argument figure à la p. 336 de [15].) Donc si la variété X a bonne réduction, l'assertion résulte des conjectures de Weil généralisées démontrées dans Deligne [13] : les G-modules $H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)$ et $H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(2))$ sont de poids 1 et -3, respectivement, donc le Frobenius n'a pas de points fixes. (Rappelons le calcul des poids : le groupe de cohomologie $H^i(X, \mathbb{Q}_l(j))$ est de poids $i-2j$ si l'action de G est non ramifiée ; le Frobenius n'a pas de points fixes si le poids est différent de zéro. D'ailleurs, pour cette partie on aurait pu se passer du théorème de Lefschetz vache ; son utilisation sera plutôt commode dans ce qui suit.)

Si l'on suppose seulement que la variété de Picard ait bonne réduction, l'argument est le suivant. La théorie de Kummer pour la cohomologie étale fournit un isomorphisme

$$H^1(\overline{X}, \mu_{l^n}) \cong {}_{l^n}Pic(\overline{X}),$$

et comme les $\overline{k}$-points de la variété abélienne $Pic^0(X)$ forment un groupe divisible, la suite exacte

$$0 \to Pic^0(\overline{X}) \to Pic(\overline{X}) \to NS(\overline{X}) \to 0$$

fournit une suite exacte

$$0 \to {}_{l^n}Pic^0(\overline{X}) \to {}_{l^n}Pic(\overline{X}) \to {}_{l^n}NS(\overline{X}) \to 0$$

où $NS(\overline{X})$ est le groupe de Néron-Severi de $\overline{X}$. C'est un groupe de type fini, donc son sous-groupe de torsion est fini et par passage à la limite projective on obtient un isomorphisme de modules de Tate l-adiques :

$$T_l Pic^0(\overline{X}) \cong T_l Pic(\overline{X}).$$

Le deuxième groupe n'est autre que $H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(1))$; en tordant avec $\mathbb{Q}_l(1)$ ou $\mathbb{Q}_l(-1)$, et en appliquant au premier groupe le théorème de Weil sur les variétés abéliennes, on obtient que les deux modules galoisiens qui nous intéressent ont les mêmes poids que dans le cas précédent.

Pour une variété X avec bonne réduction, l'assertion c) résulte du fait que $H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)$ est de poids 2. Supposons donc que X ait éventuellement mauvaise réduction, mais $H^2(X, O_X) = 0$. On utilise de nouveau la théorie de Kummer pour la cohomologie étale pour obtenir la suite exacte G-équivariante :

$$0 \to Pic(\overline{X})/l^n \to H^2(\overline{X}, \mu_{l^n}) \to {}_{l^n}Br(\overline{X}) \to 0$$

où $Br(\overline{X})$ est le groupe de Brauer cohomologique de $\overline{X}$. Mais l'hypothèse $H^2(X, O_X) = 0$ implique la finitude de la torsion l-primaire de ce groupe (cf. [10], démonstration de la prop. 2.11). Par passage à la limite projective, la suite exacte se réduit donc à l'isomorphisme

$$Pic(\overline{X}) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l \cong H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(1)),$$

ou encore, utilisant la divisibilité de $Pic^0(\overline{X})$, à

$$NS(\overline{X}) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l \cong H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(1)) \tag{4.1}$$

(rappelons que pour un groupe abélien A, $A \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l$ note la limite projective des groupes $A/l^n A$ suivant les puissances de l). Comme l'action de G sur le groupe de type fini $NS(\overline{X})$ est continue, elle se factorise à travers un quotient fini et un argument de norme permet de supposer que cette action est en fait triviale. En tensorisant avec $\mathbb{Q}_l(-1)$, on obtient donc finalement :

$$NS(\overline{X}) \hat{\otimes} \mathbb{Q}_l(-1) \cong H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_l).$$

Mais les G-invariants du groupe à gauche sont triviaux car $\mathbb{Q}_l(-1)$ est de poids 2.

Remarques 4.2. 1) La dualité de Tate locale à coefficients $\mathbb{Q}_l(j)$ semble être absente de la littérature ; elle résulte pourtant par un argument standard de passage à la limite (pour la cohomologie continue qui est la cohomologie usuelle sur un corps local) de la version à coefficients finis prouvée dans [29]. Alternativement, on aurait pu raisonner sur les dimensions des groupes en question, n'utilisant que la dualité de Tate usuelle, comme le fait Jannsen dans [15].

2) Comme me fait remarquer C. Breuil, dans le cas d'une variété avec bonne réduction on peut invoquer des arguments de poids tout à fait analogues pour

$l = p$, avec comme seule grande différence que la caractéristique d'Euler-Poincaré de $H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_p)$ est non nulle. Donc a fortiori $H^2(X, \mathbb{Q}_p) \neq 0$. Voir aussi [30], Theorem 2 (*ii*).

5. Résultats de finitude pour SK_1 de surfaces

Dans tout ce chapitre, X est une *surface* propre et lisse sur un corps p-adique, l un nombre premier (non nécessairement premier à p) et l'on suppose l'hypothèse $\mathbf{BK}(3, l)$ vérifiée pour le corps de fonctions $k(X)$ de X (ce qui est le cas pour $l = 2$). Sous ces hypothèses, la Proposition 2.2 (1) et la Remarque 2.3 (3) impliquent :

Rappel 5.1. — *Pour tout entier positif n, la l^n-torsion du groupe $SK_1(X)$ est un quotient du groupe $NH^4(X, \mu_{l^n}^{\otimes 3})$ défini dans la Remarque 2.3.*

Voici un corollaire immédiat.

Proposition 5.2. — *Le groupe ${}_{l^n}SK_1(X)$ est fini pour tout n et le groupe $SK_1(X)\{l\}$ est de cotype fini (i.e. le groupe abélien dual est un $\mathbb{Z}_l$-module de type fini).*

Démonstration. Vu le rappel précédent, pour le premier énoncé il suffit de remarquer que le groupe de cohomologie étale $H^4(X, \mu_{l^n}^{\otimes 3})$ est fini si le corps de base est un corps p-adique ; c'est une conséquence du théorème de finitude en cohomologie étale ([20], th. VI.2.1) et de la finitude de la cohomologie galoisienne d'un module fini sur un corps p-adique ([29], II.5.1, prop. 14). La deuxième assertion résulte de la première après passage à la limite inductive.

Remarque 5.3. On peut, si l'on veut, démontrer cette proposition par voie élémentaire, i.e. sans utiliser la cohomologie motivique (même dans le cas d'un corps local d'égale caractéristique, du moins pour l inversible).

Les deux observations suivantes sont dues à J.-L. Colliot-Thélène.

Proposition 5.4. — *Le groupe $V(X)$ est extension d'un l-groupe fini par un groupe l-divisible.*

(Rappelons que $V(X)$ est le noyau de la norme $SK_1(X) \to k^\times$.)

Démonstration. Cela résulte de la proposition précédente et du fait, déjà utilisé lors de la dérivation du Corollaire 1.3, que $V(X)$ est extension d'un groupe de torsion par un groupe divisible.

Proposition 5.5. — *Soit X comme ci-dessus. Supposons de plus que la variété d'Albanese de X ait potentiellement bonne réduction. Alors le groupe $SK_1(X)\{l\}$ est fini pour $l \neq p$; pour $l = p$ on a la même conclusion sous l'hypothèse plus forte $H^1(X, O_X) = 0$.*

En effet, l'hypothèse $H^1(X, O_X) = 0$ implique la trivialité de la variété de Picard, et donc également de la variété d'Albanese (cf. par exemple [7], chap. 8.4, Theorem 1).

Démonstration. Comme au chapitre précédent, on utilise la filtration de Hochschild-Serre sur le groupe $H^4(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3))$ dont $SK_1(X)\{l\}$ est un sous-quotient.

Le groupe $H^0(k, H^4(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)))$ est isomorphe par le morphisme trace de la dualité de Poincaré au groupe $H^0(k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))$ qui est fini même pour $l = p$, on l'a vu. La dualité de Poincaré implique également que le groupe $H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ s'identifie à la torsion l-primaire de la variété d'Albanese de X (qui est par définition la duale de la variété de Picard, donc on peut raisonner de façon analogue aux arguments du chapitre précédent). Ainsi pour $l \neq p$ un argument faisant intervenir caractéristique d'Euler-Poincaré, dualité et poids (pour ce dernier dans le contexte de $\mathbb{Z}_l$-modules, voir [10], Theorem 1.5.1) montre que le groupe $H^1(k, H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)))$ est fini ; il est nul pour $l = p$ sous l'hypothèse plus forte. Enfin, un résultat récent de K. Sato [27] montre que le groupe $NH^4(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)) \cap H^2(k, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)))$ est toujours fini sur un corps p-adique, indépendamment des hypothèses sur la réduction de X. Ceci termine la démonstration.

Dans le reste de ce chapitre nous étudions des surfaces X admettant un morphisme propre et surjectif $p : X \to C$ avec C une courbe propre et lisse sur k. La fonctorialité covariante du complexe de Gersten (i.e. les normes en K-théorie et la loi de réciprocité de Weil, cf. [4], chap. 1) définit alors une application norme

$$p_* : SK_1(X) \to SK_1(C).$$

Nous allons démontrer la proposition suivante qui sous sa forme actuelle est plus forte que celle figurant dans la première version de cet article ; l'amélioration a été suggérée par un rapporteur que j'en remercie chaleureusement.

PROPOSITION 5.6. — *Soit k un corps p-adique et soit X une k-surface propre, lisse, géométriquement intègre équipée d'un morphisme propre et plat $p : X \to C$ à fibres géométriquement connexes, où C est une k-courbe propre, lisse et géométriquement intègre. Supposons toujours que $k(X)$ vérifie l'hypothèse* $\mathbf{BK}(3, l)$ *pour un nombre premier l et faisons les hypothèses :*

a) Le groupe $H^0(k, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_l))$ est trivial ;

b) le morphisme naturel de k-variétés abéliennes $Pic^0(C) \to Pic^0(X)$ induit par p admet un conoyau ayant potentiellement bonne réduction.

Alors le sous-groupe de torsion l-primaire de $ker(p_*)$ est fini.

La proposition permet donc de ramener l'étude de la finitude de $SK_1(X)\{l\}$ à celle de $SK_1(C)\{l\}$. Malheureusement, à l'heure actuelle on ne connaît pas la finitude de $SK_1(C)\{l\}$ pour une courbe propre lisse C quelconque sur un corps p-adique, mais pour $l \neq p$ c'est quand même le cas pour les courbes avec $H^2(C, \mathbb{Q}_l) = 0$ d'après le Théorème et, par un travail non publié de T. Sato [28], pour les courbes de genre 1. D'autre part, l'intérêt d'étudier de telles surfaces fibrées est confirmé par le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5.7. — *Admettons que le groupe $SK_1(C)\{l\}$ soit toujours fini pour une courbe C propre et lisse définie sur une corps p-adique. Alors (toujours sous l'hypothèse* $\mathbf{BK}(3, l)$ *pour $k(X)$) le groupe $SK_1(X)\{l\}$ est fini pour toute surface X propre, lisse, géométriquement intègre définie sur un corps p-adique satisfaisant à la condition $H^2(X, O_X) = 0$.*

Démonstration du corollaire. D'après la classification des surfaces par Castelnuovo-Enriques, sur la clôture algébrique $\overline{k}$ de k les surfaces avec $H^2(X, O_X) = 0$ se répartissent en deux classes (cf. Beauville [2], lemme V.18 ; Colliot-Thélène et Raskind [11], p. 238) : ou bien $H^1(\overline{X}, O_{\overline{X}}) = 0$ (auquel cas on peut appliquer la proposition précédente) ; ou alors l'application d'Albanese fournit un morphisme propre et plat $\overline{p} : \overline{X} \to \overline{C}$ sur une courbe propre lisse intègre $\overline{C}$ ayant des fibres connexes et induisant un isomorphisme $Pic^0(\overline{C}) \cong Pic^0(\overline{X})$. Pour ramener ce dernier cas à la situation de la proposition 5.6, notons d'abord que d'après la démonstration de l'énoncé c) du chapitre 4 (qui marche également pour $l = p$), l'hypothèse a) de la proposition est une conséquence de la trivialité de $H^2(X, O_X)$. Il reste alors de voir que l'on peut supposer la courbe $\overline{C}$ et le morphisme $\overline{p}$ définis sur k. C'est en tout cas possible après extension finie de k, mais vu la prop. 5.2, pour démontrer la finitude de $SK_1(X)\{l\}$ il suffit de voir qu'il est d'exposant fini et un argument de norme standard montre que cette dernière propriété peut être vérifiée après extension finie de k.

Démonstration de la proposition 5.6. Nous utilisons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^4_{Zar}(X, \mathbb{Z}(3)) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l & \to & NH^4(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)) & \to & SK_1(X)\{l\} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} & & \\ 0 & \to & H^2_{Zar}(C, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l & \to & H^2_{\acute{e}t}(C, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & \to & SK_1(C)\{l\} & \to & 0 \end{array}$$

Les lignes de ce diagramme sont exactes et sont fournies par les lemmes 3.2 et 3.3 après passage à la limite inductive sur les puissances de l. Les morphismes verticaux pourraient être définis de façon élémentaire, mais pour voir la commutativité il convient de les déduire de propriétés plus profondes de la cohomologie motivique. En fait, le morphisme p induit des morphismes $H^i_{Zar}(X, \mathbb{Z}(j)) \to H^{i-2}_{Zar}(C, \mathbb{Z}(j-1))$ pour tout i, j, ce que l'on voit comme suit. D'après [34], Corollary 3.2.7 il revient au même de construire un morphisme

$$Hom_{\mathbf{DM}^{eff}_{-}(k)}(M(X), \mathbb{Z}(j)[i]) \to Hom_{\mathbf{DM}^{eff}_{-}(k)}(M(C), \mathbb{Z}(j-1)[i-2])$$

où $M(X)$, $M(C)$ sont respectivement les “motifs” de X et de C dans la catégorie $\mathbf{DM}^{eff}_{-}(k)$ de *loc.cit.* Mais d'après [34], Theorem 4.3.1 le deuxième groupe est isomorphe à $Hom_{\mathbf{DM}^{eff}_{-}(k)}(M(C)(1)[2], \mathbb{Z}(j)[i])$, donc on peut définir le morphisme comme celui induit par le $\mathbf{DM}^{eff}_{-}(k)$-morphisme

$$p^*_{\mathbf{DM}} : M(C)(1)[2] \to M(X)$$

existant d'après [34], Corollary 4.2.4. (Notons que ces résultats utilisent la résolution de singularités au-dessus de k.) Ceci définit les morphismes verticaux aux deux extrémités.

Pour voir que l'on retrouve bien notre morphisme p_* à droite, notons que le morphisme $p^*_{\mathbf{DM}}$ induit des morphismes sur les résolutions de Gersten calculant les groupes de $\mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)$-cohomologie et on peut vérifier que pour les morphismes de type $H^r(k(x), \mathbb{Z}(r)) \to H^r(k(c), \mathbb{Z}(r))$ qui y interviennent pour les extensions finies de corps $k(x)|k(c)$ le morphisme induit est bien le transfert naturel; d'autre part, les isomorphismes $H^r(k(x), \mathbb{Z}(r)) \cong K^M_r(k(x))$ de [33] sont compatibles aux transferts. Le morphisme du milieu est construit de la même manière en mettant des coefficients $\tau_{\leq j}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes j}$ au lieu des $\mathbb{Z}(j)$ et en remplaçant la référence au th. 4.3.1. de [34] par le cor. 8.3 de [33]. Enfin la commutativité du diagramme résulte de la fonctorialité de la construction tenant compte de la compatibilité prouvée dans [33], cor. 8.3.

Pour démontrer la proposition il suffit alors de voir deux choses :

(1) Le morphisme vertical de gauche est surjectif;
(2) celui du milieu admet un noyau fini sous les hypothèses a) et b).

Pour établir l'énoncé (1) on va montrer par un argument standard que le morphisme $H^4(X, \mathbb{Z}(3)) \to H^2(C, \mathbb{Z}(2))$ admet un conoyau d'exposant fini. Prenons une multisection de la projection p, i.e. une courbe propre et lisse $\tilde{C}$ équipée d'un morphisme $i : \tilde{C} \to X$ tel que le composé $p \circ i : \tilde{C} \to C$ soit fini et plat. En regardant les résolutions de Gersten on voit que i induit un morphisme $H^2(\tilde{C}, \mathbb{Z}(2)) \to H^4(X, \mathbb{Z}(3))$ dont le composé avec $H^4(X, \mathbb{Z}(3)) \to H^2(C, \mathbb{Z}(2))$ est la multiplication par le degré de $p \circ i$, donc le conoyau en question est d'exposant divisant ce degré.

Pour l'énoncé (2), notons d'abord qu'il existe un morphisme $NH^4(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)) \to H^2_{ét}(C, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ défini purement en termes de cohomologie étale, à savoir celui fourni par la fonctorialité covariante de la suite spectrale de Bloch-Ogus pour les morphismes propres. Rappelons que le morphisme induit sur l'aboutissement de la suite spectrale est donné par le composé

$$(5.8) \qquad H^4_{ét}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)) \to H^2_{ét}(C, \mathbf{R}^2p_*\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)) \to H^2_{ét}(C, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)),$$

le premier morphisme provenant de la suite spectrale de Leray et le deuxième de la dualité de Poincaré; notre morphisme est simplement sa restriction à $NH^4(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3))$. On peut l'identifier à celui figurant dans le diagramme en dévissant les groupes $NH^4(X, \mathbb{Q}_l/Z_l(3))$ et $H^2_{ét}(C, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ par la suite spectrale de Leray associée à la projection π entre les grands sites étale et Zariski de k, puis en montrant que quand on calcule les morphismes induits à chaque cran de la filtration à l'aide des résolutions de Bloch-Ogus, on trouve le même résultat dans les deux cas, à savoir les morphismes induits par les corestrictions. (Pour le calcul du morphisme "motivique" par les résolutions de Bloch-Ogus, voir la démonstration de la prop. 8.2 de [33]).

Il suffit donc de voir que le morphisme composé dans (5.8) admet un noyau fini. Par la dualité arithmétique 2.1, ce morphisme s'identifie au dual du morphisme naturel $H^2(C, \mathbb{Z}_l) \to H^2(X, \mathbb{Z}_l)$ induit par p (la vérification de ce fait se réduit à une compatibilité entre divers foncteurs de type $\mathbf{R}f_!$). Il suffit donc de prouver que ce dernier morphisme admet un conoyau fini, mais comme les $\mathbb{Z}_l$-modules en question sont de type fini (cf. la démonstration de la prop. 5.2), il revient au même de dire que le conoyau est de torsion, ou encore que le morphisme $H^2(C,\mathbb{Q}_l) \to H^2(X,\mathbb{Q}_l)$ est surjectif. Mais la projection p induit un morphisme de suites spectrales de Hochschild-Serre $E_2^{pq}(C) \to E_2^{pq}(X)$, où la première est celle convergeant vers $H^{p+q}(C,\mathbb{Q}_l)$ et la seconde celle convergeant vers $H^{p+q}(X,\mathbb{Q}_l)$. Il suffit alors de voir que l'on trouve des surjections au niveau des termes E_2^{pq} avec $p+q=2$. Or les termes $E_2^{20}(X)$ et $E_2^{02}(X)$ sont triviaux, respectivement par l'énoncé a) du chapitre 4 (valable aussi pour $l=p$) et par l'hypothèse a) de la proposition. Il ne reste donc qu'à traiter les termes E_2^{11}, i.e. d'établir la surjectivité du morphisme $H^1(k,H^1(\overline{C},\mathbb{Q}_l)) \to H^1(k,H^1(\overline{X},\mathbb{Q}_l))$.

Pour cela, remarquons d'abord que les fibres de $\overline{p}$ étant supposées connexes, une considération de la suite spectrale de Leray associée à la projection $\overline{p} : \overline{X} \to \overline{C}$ nous apprend que le morphisme naturel $H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_l(1)) \to H^1(\overline{X},\mathbb{Z}_l(1))$ est une injection. Mais nous avons rappelé au chapitre 4 l'existence d'un isomorphisme $H^1(\overline{X},\mathbb{Z}_l(1)) \cong T_l Pic^0(\overline{X})$; il en est de même pour $\overline{C}$. Donc en désignant par A la variété abélienne conoyau de $Pic^0(C) \to Pic^0(X)$, nous avons une suite exacte de $\mathbb{Z}_l$-modules galoisiens

$$0 \to H^1(\overline{C},\mathbb{Z}_l(1)) \to H^1(\overline{X},\mathbb{Z}_l(1)) \to T_l\overline{A} \to 0.$$

En tensorisant cette suite par $\mathbb{Q}_l(-1)$ en en prenant sa cohomologie galoisienne, on voit qu'il suffit d'établir la trivialité du groupe $H^1(k, T_l\overline{A}\otimes\mathbb{Q}_l(-1))$. Mais A a potentiellement bonne réduction par l'hypothèse b), donc l'assertion découle pour $l \neq p$ d'un argument de poids comme au chapitre 4 ; pour $l=p$ on applique la méthode de la démonstration de [15], Theorem 5.

Appendice A : Lien avec la $\mathcal{K}$-cohomologie

Dans cet appendice, nous faisons le pont entre le langage motivique utilisé dans cet article et les constructions plus classiques de la K-théorie de Milnor. Nous travaillerons sur un corps parfait k au-dessus duquel on dispose de la résolution des singularités sous une forme forte (i. e. pour l'instant sur un corps de caractéristique 0).

Le résultat principal est la traduction suivante du lemme 3.2 qui précise également la Proposition 2.2 (1) :

Proposition A.1. — *Soit X une k-variété lisse de dimension d. Supposons en outre que la condition* $\mathbf{BK}(3,l)$ *soit vérifiée par les corps résiduels des points de dimension 2 de X. Alors pour tout entier positif n, on dispose d'une suite exacte*

$$0 \to H^{d-1}_{Zar}(X,\mathcal{K}^M_{d+1})/l^n \to H^{2d}_{Zar}(X,\tau_{\leqq d+1}\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) \to {}_{l^n}SK_1(X) \to 0.$$

Ici, on *définit* le faisceau $\mathcal{K}^M_{d+1}$ sur le sous-site du grand site Zariski de k formé des schémas *lisses* sur k comme le noyau du morphisme de faisceaux donné localement sur un schéma lisse S par :

$$\bigoplus_{s\in S^0} K^M_{d+1}(k(s)) \to \bigoplus_{s\in S^1} K^M_d(k(s))$$

où S^i veut dire les points de codimension i de S et le morphisme est induit par les résidus en K-théorie de Milnor.

Exemples A.2. Explicitons la suite exacte de la proposition en basses dimensions.

(1) Pour X une courbe, on retrouve la suite bien connue de Sousline ([31], cor. 23.4) :

$$0 \to H^0_{Zar}(X, \mathcal{K}_2)/l^n \to H^2_{\acute{e}t}(X, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to {}_{l^n}SK_1(X) \to 0.$$

(2) Pour X une surface, la suite exacte s'écrit :

$$0 \to H^1_{Zar}(X, \mathcal{K}_3^M)/l^n \to NH^4(X, \mu_{l^n}^{\otimes 3}) \to {}_{l^n}SK_1(X) \to 0,$$

où $NH^4(X, \mu_{l^n}^{\otimes 3})$ est le groupe introduit dans la Remarque 2.3 (3). Là encore, on retrouve l'analogue d'une suite exacte de Bloch et Sousline pour la l^n- torsion du groupe de Chow de codimension deux ([31], th. 23.1, [32], cor. 4.4).

La Proposition A.1 est une conséquence immédiate des lemmes 3.2 et 3.3 et du résultat suivant de Voevodsky, appliqué avec $i = 2d$ et $j = d + 1$:

Proposition A.3. — *Soit X un k-schéma lisse. Alors pour tout $i \geqq j \geqq 0$ il existe un morphisme canonique*

$$H^i_{Zar}(X, \mathbb{Z}(j)) \to H^{i-j}_{Zar}(X, \mathcal{K}_j^M)$$

qui est un isomorphisme pour $i \geqq 2j - 2$.

Démonstration. C'est la deuxième partie du corollaire 2.4 de [37]. Comme Voevodsky est un peu avare en matière de détails de la démonstration, on la donne pour la satisfaction des lectrices et des lecteurs.

En ce qui concerne la définition du morphisme, nous avons déjà prouvé lors de la démonstration du lemme 3.3 l'existence d'un morphisme

$$\rho_{i,j} : \ H^i_{Zar}(X, \mathbb{Z}(j)) \to H^{i-j}_{Zar}(X, \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j))$$

fourni par la suite spectrale d'hypercohomologie. D'autre part, on dispose d'un *isomorphisme* de faisceaux $\mathcal{K}_j^M \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)$ sur le sous-site du grand site Zariski de k formé des k-schémas lisses. Le diagramme commutatif exact suivant donne sa définition localement sur un k-schéma lisse S :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & \Gamma(S, \mathcal{K}_j^M) & \to & \bigoplus_{x \in S^0} K_j^M(k(x)) & \to & \bigoplus_{x \in S^1} K_{j-1}^M(k(x)) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
0 & \to & \Gamma(S, \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)) & \to & \bigoplus_{x \in S^0} H^j(k(x), \mathbb{Z}(j)) & \to & \bigoplus_{x \in S^1} H^{j-1}(k(x), \mathbb{Z}(j-1))
\end{array}$$

Ici, les deux isomorphismes verticaux sont définis par le th. 3.4 de [33]. La suite exacte du haut est la définition du faisceau $\mathcal{K}_j^M$ et celle du bas est fournie par la résolution (3.5) de Gersten-Voevodsky. Enfin la commutativité du carré de droite résulte de la Proposition A.4 ci-après.

Admettons cette compatibilité pour le moment, et terminons la démonstration. Il reste à montrer que $\rho_{i,j}$ est un isomorphisme pour $i \geqq 2j-2$. En effet, pour $i > 2j-2$ la résolution de Gersten montre que les groupes $H_{Zar}^{i-j+r+1}(X, \mathcal{H}^{j-r}\mathbb{Z}(j))$ sont triviaux pour tout entier positif r, donc les différentielles de la suite spectrale d'hypercohomologie partant de $H_{Zar}^{i-j}(X, \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j))$ sont toutes nulles et le morphisme $\rho_{i,j}$ est surjectif. Par le même argument, les groupes $H_{Zar}^{i-j+r}(X, \mathcal{H}^{j-r}\mathbb{Z}(j))$ sont également nuls pour $r \geqq 1$, d'où la proposition dans ce cas. Pour $i = 2j-2$, il faut encore démontrer la trivialité des groupes $H^j(X, \mathcal{H}^{j-1}\mathbb{Z}(j))$ et $H^{j-1}(X, \mathcal{H}^{j-1}\mathbb{Z}(j))$, ce qui résulte via la résolution de Gersten de $\mathcal{H}^{-1}\mathbb{Z}(0) \cong \mathcal{H}^0\mathbb{Z}(1) \cong 0$. Voilà.

Proposition A.4. — *Soient X un k-schéma lisse, η un point de X et x un point de codimension 1 sur l'adhérence de η. Alors on dispose du diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} K_j^M(k(\eta)) & \xrightarrow{\partial_j^M} & K_{j-1}^M(k(x)) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H^j(k(\eta), \mathbb{Z}(j)) & \xrightarrow{\partial_j} & H^{j-1}(k(x), \mathbb{Z}(j-1)) \end{array}$$

où le morphisme ∂_j^M est un morphisme résidu en K-théorie de Milnor, le morphisme ∂_j est un résidu en cohomologie motivique et les isomorphismes verticaux sont définis par Sousline et Voevodsky dans [33], th. 3.4.

Le reste de l'appendice A est consacré à la démonstration de la proposition. Soit Y le normalisé de l'adhérence de η dans X. Pour calculer les résidus attachés à x dans les deux théories, on peut prendre les sommes de résidus attachés aux points y de Y au-dessus de x suivis de transferts pour les extensions finies de corps $k(y)|k(x)$. D'autre part, d'après [33], Lemma 3.4.4, les isomorphismes $\mathcal{K}_j \cong \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)$ sont compatibles aux transferts. Par conséquent, on peut désormais remplacer X par le lieu lisse de Y.

Soit $X_x = \operatorname{Spec} A$ le schéma local de X en x. L'anneau A est un anneau de valuation discrète de corps de fractions $k(\eta)$ et $K_j^M k(\eta)$ est engendré par des symboles du type $< \pi, u_1, \ldots, u_{j-1} >$ où π est une uniformisante et les u_i sont des unités de A. Pour un tel symbole, on a par définition (cf. par exemple [1], Proposition 4.5(c)) $\partial_j^M(< \pi, u_1, \ldots, u_{j-1} >) =< \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_{j-1} >$, où $\overline{u}_i$ est l'image de u_i dans $k(x)$. On a donc pour tout couple (i,j) la formule

$$\partial_{i+j}^M(< \pi, u_1, \ldots, u_{i+j-1} >) = \partial_i^M(< \pi, \ldots, u_{i-1} >) \cup < \overline{u}_i, \ldots, \overline{u}_{i+j-1} > .$$

Utilisant la compatibilité des isomorphismes $\mathcal{K}_j^M \cong \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)$ aux produits (également énoncée dans le th. 3.4 de [33]), on voit donc que la Proposition A.4 découle des deux lemmes suivants :

Lemme A.5. — *Le résidu ∂_1 pour le schéma local $X_x = \operatorname{Spec} A$ s'identifie à la valuation $ord_x : k(\eta)^\times \to \mathbb{Z}$ attachée à A.*

Lemme A.6. — *Notons i_η (resp. i_x) l'inclusion du point η (resp. x) dans X_x. On a alors pour tout $\alpha \in H^i(k(\eta), \mathbb{Z}(i))$ et $\beta \in H^0(X_x, \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j))$ la formule*

$$\partial_{i+j}(\alpha \cup i_\eta^*(\beta)) = \partial_i(\alpha) \cup i_x^*(\beta).$$

Avant de donner les démonstrations, rappelons en plus grand détail la construction du résidu

$$\partial_j : \qquad H^j(k(\eta), \mathbb{Z}(j)) \to H^{j-1}(k(x), \mathbb{Z}(j-1)).$$

Il revient au même de construire un morphisme

$$H^0(k(\eta), \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)) \to H^0(k(x), \mathcal{H}^{j-1}\mathbb{Z}(j-1)),$$

ce qui se fait comme suit : on compose le cobord

$$H^0(k(\eta), \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)) \to H^1_x(X_x, \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j))$$

provenant de la théorie de la localisation sur $(X_x)_{Zar}$ avec la chaîne d'isomorphismes

$$H^1_x(X_x, \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)) \cong H^0(k(x), \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j))_{-1} \cong H^0(k(x), \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)_{-1}) \tag{A.7}$$

existant d'après [35], Lemma 4.36 et Proposition 4.34. Enfin on cite à nouveau le th. 2.1 de [36] pour obtenir un isomorphisme de faisceaux de Zariski avec transferts $\mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)_{-1} \cong \mathcal{H}^{j-1}\mathbb{Z}(j-1)$.

Passons maintenant à la *démonstration du lemme A.5.* On dispose du diagramme commutatif à lignes exactes, celle du haut provenant de la théorie de localisation sur $(X_x)_{Zar}$:

$$\begin{tikzcd}
H^0(X_x, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^0(k(\eta), \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^1_x(X_x, \mathbb{G}_m) \arrow[r] & H^1(X_x, \mathbb{G}_m) \arrow[d, "\cong"] \\
A^\times \arrow[r] & k(\eta)^\times \arrow[r, "ord_x"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{A.8}$$

Vu le quasi-isomorphisme $\mathbb{Z}(1) \simeq \mathbb{G}_m[-1]$, notre tâche est de vérifier que l'isomorphisme $H^1_x(X_x, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}$ complétant ce diagramme se factorise à travers le cas $j = 1$ de l'isomorphisme (A.7) suivi de l'isomorphisme $H^0(k(x), \mathcal{H}^1\mathbb{Z}(1)_{-1}) \cong H^0(k(x), \mathcal{H}^0\mathbb{Z}(0))$. Or d'après la démonstration de [35], Lemma 4.36, la suite d'isomorphismes

$$H^1_x(X_x, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\cong} H^0(k(x), (\mathbb{G}_m)_{-1}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$$

est obtenue en établissant d'abord un isomorphisme "de pureté"

$$H^1_x(X_x, \mathbb{G}_m) \overset{\cong}{\to} H^1_{(0)}(\mathbb{A}^1_{k(x)}, \mathbb{G}_m) \tag{A.9}$$

où (0) est le point zéro de la droite affine $\mathbb{A}^1_{k(x)}$, puis en appliquant la suite exacte de localisation sur $(A^1_{k(x)})_{Zar}$:

$$H^0(\mathbb{A}^1_{k(x)}, \mathbb{G}_m) \to H^0(\mathbb{A}^1_{k(x)} \setminus (0), \mathbb{G}_m) \to H^1_{(0)}(\mathbb{A}^1_{k(x)}, \mathbb{G}_m) \to 0. \tag{A.10}$$

D'après la démonstration du th. 4.14 de [35], l'isomorphisme (A.9) est obtenu en construisant un k-schéma W muni d'un point fermé canonique w et équipé de k-morphismes $p_1 : W \to X$ et $p_2 : W \to \mathbb{A}^1_{k(x)}$ induisant des isomorphismes du sous-schéma $\{w\}$ avec $\{x\}$ et avec $\{(0)\}$, puis en montrant que p_1 et p_2 induisent des isomorphismes de $H^1_w(W, \mathbb{G}_m)$ avec chacun des deux groupes figurant dans (A.9). (Plus précisément, on considère ici X_x comme limite projective de voisinages ouverts affines U de x en X et on applique les arguments de *loc.cit.* aux ouverts U ; le schéma W et l'isomorphisme (A.9) s'obtiennent alors par passage à la limite.) Mais les p_i induisent également des morphismes de la suite de localisation du couple (W, w) à coefficients $\mathbb{G}_m$ vers celle figurant dans la ligne du haut de (A.8) et vers celle dans (A.10), d'où l'assertion.

La *démonstration du lemme A.6* se fait en trois étapes.

1) La définition des faisceaux $\mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)_{-1}$ donnée à la page 11 de [35] donne immédiatement que l'accouplement naturel de faisceaux avec transferts sur $(Sm/k)_{Zar}$

$$\mathcal{H}^i\mathbb{Z}(i) \otimes \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j) \to \mathcal{H}^{i+j}\mathbb{Z}(i+j)$$

induit un accouplement

$$\mathcal{H}^i\mathbb{Z}(i)_{-1} \otimes H^j\mathbb{Z}(j) \to \mathcal{H}^{i+j}\mathbb{Z}(i+j)_{-1}. \tag{A.11}$$

En dévissant la construction des isomorphismes (A.7) comme ci-dessus à l'aide du schéma auxiliaire W, on vérifie que ces accouplements font commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
H^1_x(X_x, \mathcal{H}^i\mathbb{Z}(i)) & \otimes & H^0(X_x, \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)) & \to & H^1_x(X_x, \mathcal{H}^{i+j}\mathbb{Z}(i+j)) \\
\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle i_x^*} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\
H^0(k(x), \mathcal{H}^i\mathbb{Z}(i)_{-1}) & \otimes & H^0(k(x), \mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)) & \to & H^0(k(x), \mathcal{H}^{i+j}\mathbb{Z}(i+j)_{-1})
\end{array}$$

2) D'autre part, le cup-produit de la ligne du bas s'identifie via l'isomorphisme

$$\mathcal{H}^i\mathbb{Z}(i)_{-1} \cong \mathcal{H}^{i-1}\mathbb{Z}(i-1) \tag{A.12}$$

au cup-produit induit par l'accouplement $\mathcal{H}^{i-1}\mathbb{Z}(i-1)\otimes\mathcal{H}^{j}\mathbb{Z}(j)\to\mathcal{H}^{i+j-1}\mathbb{Z}(i+j-1)$.

Pour cela, il faut d'abord invoquer [34], cor. 3.2.7 pour obtenir des isomorphismes

$$H^i(k(x),\mathbb{Z}(i))\cong Hom_{\mathbf{DM}_-^{eff}(k)}(M,\mathbb{Z}(i)[i])$$

où $\mathbf{DM}_-^{eff}(k)$ est la catégorie triangulée de [34] et M est le motif du point $Spec\,k(x)$ dans cette catégorie. Or en suivant les constructions de Voevodsky on peut identifier le $(i-1)$-ième faisceau de cohomologie de l'objet $\underline{Hom}_{\mathbf{DM}_-^{eff}(k)}(\mathbb{Z}(1),\mathbb{Z}(i))$ de $\mathbf{DM}_-^{eff}(k)$ au faisceau de Nisnevich associé au préfaisceau avec transferts $\mathcal{H}^i\mathbb{Z}(i)_{-1}$ (utiliser le triangle distingué définissant $\mathbb{Z}(1)$ comme objet de $\mathbf{DM}_-^{eff}(k)$ et la prop. 3.2.8 de [34]). Tenant compte de ce fait et du théorème de comparaison entre les cohomologies de Zariski et de Nisnevich d'un préfaisceau avec transferts ([35], Theorem 5.7), l'isomorphisme (A.12) est induit par multiplication avec $\mathbb{Z}(1)$ dans $\mathbf{DM}_-^{eff}(k)$ qui est un foncteur pleinement fidèle d'après [34], Theorem 4.3.1 ; la compatibilité requise résulte alors de ce même théorème.

3) Vu les étapes 1) et 2) ainsi que la construction du résidu ∂_i, la démonstration du lemme est réduite à la vérification de la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(k(\eta),\mathcal{H}^i\mathbb{Z}(i)) & \otimes & H^0(k(\eta),\mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)) & \to & H^0(k(\eta),\mathcal{H}^{i+j}\mathbb{Z}(i+j)) \\
\downarrow & & \uparrow i_\eta^* & & \downarrow \\
H^1_x(X_x,\mathcal{H}^i\mathbb{Z}(i)) & \otimes & H^0(X_x,\mathcal{H}^j\mathbb{Z}(j)) & \to & H^1_x(X_x,\mathcal{H}^{i+j}\mathbb{Z}(i+j))
\end{array}$$

Or pour tout faisceau de Zariski $\mathcal{F}$ sur X_x on a des isomorphismes

$$H^k(k(\eta),\mathcal{F})\cong \mathrm{Ext}^k_{X_x}(i_{\eta!}i_\eta^*\mathbb{Z},\,\mathcal{F})\qquad\text{et}\qquad H^k_x(X_x,\mathcal{F})\cong\mathrm{Ext}^k_{X_x}(i_{x*}i_x^*\mathbb{Z},\,\mathcal{F}),$$

et l'assertion résulte de la compatibilité du cup-produit construit au no. 2 de Gamst et Hoechsmann [14] aux bords provenant de la suite exacte

$$0\to i_{\eta!}i_\eta^*\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\to i_{x*}i_x^*\mathbb{Z}\to 0.$$

Appendice B : Le groupe $V(C)$ est en général de rang infini

par J.-L. Colliot-Thélène

Dans cet appendice, on établit un fait annoncé dans l'introduction de l'article de T. Szamuely (dont nous reprenons les notations) : pour une courbe C projective lisse connexe sur un corps p-adique, de genre au moins un, le noyau $V(C)$ de l'application norme $N : SK_1(C)\to k^*$ est “gros”.

Lemme 1. — *Soit C une courbe projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps k. Pour tout corps K contenant k, les applications de restriction $SK_1(C) \to SK_1(C_K)$ et $V(C) \to V(C_K)$ ont un noyau de torsion.*

Démonstration (bien connue). Donnons la démonstration pour $F(C) = SK_1(C) = H^1(C, \mathcal{K}_2)$. Le foncteur $K \mapsto F(C_K)$ commute aux limites directes filtrantes. Il suffit donc de montrer le résultat dans les deux cas suivants : K est une extension finie de k, et $K = k(t)$ est le corps des fonctions rationnelles en une variable sur k (il convient ensuite bien sûr d'appliquer le résultat obtenu aux extensions de k). Pour K/k finie, le résultat provient de l'existence d'une application norme $F(C_K) \to F(C)$ satisfaisant : le composé de la restriction $F(C) \to F(C_K)$ avec la norme est la multiplication par le degré de K sur k. C'est bien connu, mais c'est aussi facile à montrer sur le complexe de Gersten-Quillen. Soit $K = k(t)$. Le groupe $H^1(C_{k(t)}, \mathcal{K}_2)$ est la limite directe des groupes $H^1(C \times_k U, \mathcal{K}_2)$ pour U parcourant les ouverts non vides de la droite affine. Si $\alpha \in H^1(C, \mathcal{K}_2)$ s'annule dans $H^1(C_{k(t)}, \mathcal{K}_2)$, alors il s'annule dans un $H^1(C \times_k U, \mathcal{K}_2)$. Lorsque le corps k est infini, il existe un point k-rationnel dans U et le résultat s'obtient en spécialisant en ce point. Le cas d'un corps fini se traite par un argument de norme.

Lemme 2. — *Soit C/k comme ci-dessus. Notons $K = k(t)$ le corps des fractions rationnelles en une variable et C_K la K-courbe $C \otimes_k K$. Le groupe $SK_1(C_K)$ contient le groupe* $\mathrm{Pic}(C)$ *comme facteur direct, et le groupe $V(C_K)$ contient le groupe* $\mathrm{Pic}^0(C)$ *comme facteur direct.*

Démonstration (bien connue). On a le diagramme commutatif, où $\mathrm{Div}(C)$ est le groupe des diviseurs de C :

$$\begin{array}{ccccc} k(C)^* & \to & K_2K(C) & \to & k(C)^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Div}(C) & \to & \oplus_{M \in C_K^{(1)}} K(M)^* & \to & \mathrm{Div}(C) \end{array}$$

Dans ce diagramme, les flèches issues de $K_2K(C)$ proviennent de symboles modérés associés à des points de codimension 1 de la k-surface $C \times_k k[t]_{(t)}$ (où $k[t]_{(t)}$ est le localisé de l'anneau de polynômes $k[t]$ en l'idéal (t)). La flèche verticale de gauche est l'application diviseur et celle de droite son opposé ; la flèche en bas à droite est également une flèche diviseur. La flèche en haut à gauche envoie $f \in k(C)^*$ sur le symbole $\{f, t\}$ et celle en dessous envoie le diviseur $\sum_P n_P P$ (avec $P \in C^{(1)}$ et $n_P \in \mathbb{Z}$) sur la famille α_M avec $\alpha_M = t^{n_P}$ si M est de la forme $P \times_k K$ pour $P \in C^{(1)}$ et $\alpha_M = 1$ sinon. Le carré de gauche commute par construction et celui de droite par l'existence du complexe de Gersten.

Passant aux conoyaux des flèches verticales, on obtient une suite d'homomorphismes $\mathrm{Pic}(C) \to SK_1(C_K) \to \mathrm{Pic}(C)$ dont le composé est l'identité par construction, d'où le premier énoncé du lemme. Le deuxième en résulte en prenant la restriction au sous-groupe $\mathrm{Pic}^0(C)$ qui s'envoie dans $V(C_K)$.

PROPOSITION. — *Soit k un corps p-adique (extension finie de $\mathbb{Q}_p$) et soit C/k une k-courbe projective, lisse, géométriquement connexe. Si le genre g de C est au moins un, alors le vectoriel $V(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est de rang infini.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout entier $n > 0$ il existe n éléments linéairement indépendants dans $V(C)$.

Soit J/k la jacobienne de C, qui est une k-variété abélienne de dimension g. Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. On a la suite exacte bien connue

$$0 \to \mathrm{Pic}(C) \to \mathrm{Pic}(C \times_k \overline{k})^G \to \mathrm{Br}(k),$$

où $\mathrm{Br}(k)$ est le groupe de Brauer de k, qui est un groupe de torsion. Par restriction aux classes de diviseurs de degré zéro, cette suite exacte induit la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(C) \to J(k) \to \mathrm{Br}(k).$$

Ainsi le quotient $J(k)/\mathrm{Pic}^0(C)$ est un groupe de torsion (ce groupe est nul si C possède un point k-rationnel).

Soit O_k l'anneau des entiers de k. C'est un résultat classique (E. Lutz, Weil, Mattuck, Tate) que le groupe $J(k)$ contient un sous-groupe ouvert isomorphe à $(O_k)^g$, groupe sans torsion de rang infini. Ainsi $\mathrm{Pic}^0(C)$ contient lui aussi un groupe sans torsion de rang infini.

Il existe un corps $k_0 \subset k$, de type fini sur le corps premier, et une k_0-courbe C_0 telle que $C_0 \times_{k_0} k \simeq C$. Pour L extension de k_0, notons ici $C_L = C_0 \times_{k_0} L$. Le groupe $\mathrm{Pic}^0(C) = \mathrm{Pic}^0(C_k)$ est la réunion de ses sous-groupes $\mathrm{Pic}^0(C_L)$ pour L parcourant les corps L avec $k_0 \subset L \subset k$ et L de type fini sur k_0. Il existe donc un L tel que $\mathrm{Pic}^0(C_L)$ contienne n éléments linéairement indépendants. Comme k est de degré de transcendance infini sur k_0, il existe un élément $t \in k$ transcendant sur L. Le lemme 2 montre que $\mathrm{Pic}^0(C_L)$ s'injecte dans $V(C_{L(t)})$. Le lemme 1 montre que le noyau de la restriction $V(C_{L(t)}) \to V(C)$ est de torsion. Ainsi $V(C)$ contient n éléments linéairement indépendants, et il en est donc de même de $V(C) \otimes \mathbb{Q}$.

Remarque. L'argument développé ci-dessus est l'une des innombrables variantes de l'argument donné par Bloch (à Angers en 1979) pour établir le théorème de Mumford sur la non-représentabilité du groupe des zéro-cycles sur une surface X (projective lisse) sur les complexes avec $H^2(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$. On peut aussi développer l'argument ci-dessus avec k un corps algébriquement clos de degré de transcendance infini (on sait que pour k algébriquement clos de caractéristique zéro, le groupe des k-points d'une variété abélienne non nulle est de rang infini), puis donner des énoncés de non-représentabilité de groupes $K_i(X)$ (resp. de cran particulier des filtrations naturelles de ces groupes) par $K_i(Y)$ (resp. ...) pour Y sous-variété de X de dimension trop petite. Dans ce contexte, l'idée d'utiliser des résidus fut trouvée en 1992, à Santa Barbara (Californie).

Bibliographie

[1] H. BASS, J. TATE. — The Milnor ring of a global field, in *Algebraic K-Theory II*, Springer LNM **342**, 1973.

[2] A. BEAUVILLE. — *Surfaces algébriques complexes*, 3ème éd., *Astérisque* **54**, 1978.

[3] A. A. BEILINSON. — Height pairing between algebraic cycles, in *Algebraic K-Theory, Arithmetic and Geometry* (Yu. I. Manin, ed.) Springer LNM **1289**, 1–25.

[4] S. BLOCH. — Algebraic K-theory and class field theory for arithmetic surfaces, *Ann. of Math.* **114** (1981), 229-265.

[5] S. BLOCH. — *Lectures on Algebraic Cycles*, Duke University, 1980.

[6] S. BLOCH and A. OGUS. — Gersten's conjecture and the homology of schemes, *Ann. Sci. ENS 4ème sér.* **7** (1974), 181-202.

[7] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD. — *Néron Models*, Springer, 1990.

[8] J.-L. COLLIOT- THÉLÈNE. — On the reciprocity sequence in the higher class field theory of function fields, in *K-Theory and Algebraic Topology* (P. G. Goerss, J. F. Jardine, eds.) Kluwer, 1993.

[9] J.-L. COLLIOT- THÉLÈNE, R. HOOBLER and B. KAHN. — The Bloch-Ogus–Gabber theorem, *Fields Institute Communications* **16** (1997), 31-94.

[10] J.-L. COLLIOT- THÉLÈNE and W. RASKIND. — K_2-cohomology and the second Chow group, *Math. Ann.* **270** (1985), 165-199.

[11] J.-L. COLLIOT- THÉLÈNE and W. RASKIND. — Groupe de Chow de codimension deux des variétés définies sur un corps de nombres : un théorème de finitude sur la torsion, *Invent. Math.* **105** (1991), 221-245.

[12] J.-L. COLLIOT- THÉLÈNE, J.-J. SANSUC et C. SOULÉ. — Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, *Duke Math. J.* **50** (1983), 763-801.

[13] P. DELIGNE. — La conjecture de Weil II, *Publ. Math. IHES* **52** (1980), 137-252.

[14] J. GAMST and K. HOECHSMANN. — Products in Sheaf-Cohomology, *Tohoku Math. J.* **22** (1970), 143-162.

[15] U. JANNSEN. — On the l-adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology, in *Galois Groups over* $\mathbf{Q}$ (Y. Ihara, K. Ribet, J-P. Serre, eds.) Springer, 1989, 315-360.

[16] K. KATO. — A Hasse principle for two-dimensional global fields, *J. reine angew. Math.* **366** (1986), 142-181.

[17] S. LANG. — Unramified class field theory over function fields in several variables, *Ann. of Math.* **64** (1956), 555-563.

[18] A. MERKUR'EV and A. SUSLIN. — K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism. Version russe : *Izv. Akad. Nauk SSSR* **46** (1982) No. 5. Version anglaise : *Math. USSR Izvestiya* **21** (1983), 307-340.

[19] A. MERKUR'EV and A. SUSLIN. — The group K_3 for a field. Version russe : *Izv. Akad. Nauk SSSR* **54** (1990) No. 3. Version anglaise : *Math. USSR Izvestiya* **36** (1991), 541-565.

[20] J. S. MILNE. — *Étale cohomology*, Princeton Univ. Press, 1980.

[21] B. PERRIN-RIOU. — Systèmes d'Euler p-adiques et théorie d'Iwasawa, *Ann. Inst. Fourier* **48** (1998), 1231–1307.

[22] W. RASKIND. — Abelian class field theory of arithmetic schemes, *Proc. Symp. Pure Math.* **58**/1 (1995), 85-187.

[23] S. SAITO. — Class field theory of curves over local fields, *J. Number Theory* **21** (1985), 44-80.

[24] S. SAITO. — Unramified class field theory of arithmetical schemes, *Ann. of Math.* **121** (1985), 251-281.

[25] S. SAITO. — A global duality theorem for varieties over number fields, in *Algebraic K-Theory : Connections with Geometry and Topology* (J. F. Jardine and V. P. Snaith, eds.), Kluwer, 1989.

[26] S. SAITO and P. SALBERGER, Class field theory for surfaces over local fields, TEX-script non publié, 1993.

[27] K. SATO. — Abel-Jacobi mappings and finiteness of motivic cohomology groups, prépublication, 1999.

[28] T. SATO. — Torsion of SK_1 of curves over local fields, tapuscrit non publié.

[29] J.-P. SERRE. — *Cohomologie galoisienne (5ème éd.)*, Springer LNM **5**, 1994.

[30] C. SOULÉ. — The rank of étale cohomology of varieties over p-adic or number fields, *Compositio Math.* **53** (1984), 113–131.

[31] A. SUSLIN. — Algebraic K-theory and the norm residue homomorphism. Version russe : *Itogi Nauki i Tehniki, Sovrem. Prob. Mat. Nov. Dost.* **25** (1984), 115-207. Version anglaise : *J. Soviet Math.* **30** (1985), 2556-2611.

[32] A. SUSLIN. — Torsion in K_2 of fields, *K-Theory* **1** (1987), 5-29.

[33] A. SUSLIN and V. VOEVODSKY. — Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients, prépublication, version révisée, 1999.

[34] V. VOEVODSKY. — Triangulated categories of motives over a field, prépublication, 1995, à paraître dans *Cycles, transfers and motivic homology theories*, Annals of Math. Studies, vol. 143.

[35] V. VOEVODSKY. — Cohomological theory of presheaves with transfers, prépublication, 1995, à paraître dans *Cycles, transfers and motivic homology theories*, Annals of Math. Studies, vol. 143.

[36] V. VOEVODSKY. — The Milnor Conjecture, prépublication, 1996.

[37] C. WEIBEL. — *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1995.

Tamás Szamuely
Alfréd Rényi Institute of Mathematics
Hungarian Academy of Sciences
PO Box 127
H-1364 Budapest, Hungary
email : `szamuely@math-inst.hu`