Rice tétel

Szokás szerint φ_i az i-edik parciálisan rekurzív függvényt jelenti.

Tétel (Fixpont tétel) *Minden $g(x)$ rekurzív függvényhez található olyan m természetes szám, hogy $\varphi_{g(m)} = \varphi_m$, úgy értve, hogy a két függvény megegyezik (speciálisan ugyanaz az értemezési tartományuk).*

Bizonyítás: Legyen $U^2(i,x)$ a kétváltozós univerzális parc.rek függvény (vagyis $\varphi_i(x) = U^2(i,x)$), valamint $U^3(i,x,y)$ a háromváltozós univerzális parc.rek függvény. Tekintsük a következő kétváltozós függvényt:

$$H(x,y) = \varphi_{g(\varphi_x(x))}(y) = U^2(g(U^2(x,x)),y). \tag{1}$$

Világos, hogy ez parc.rek, azért U^3 univerzalitása miatt van olyan természetes szám, mondjuk 1234, hogy minden $x, y \in \omega$-ra

$$H(x,y) = U^3(1234,x,y).$$

Az s-m-n tétel szerint van olyan $s(i,x)$ kétváltozós *rekurzív* függvény, amire $U^3(i,x,y) = U^2(s(i,x),y)$ tetszőleges i, x, és y értékekre, és így speciálisan

$$H(x,y) = U^2(s(1234,x),y) \tag{2}$$

minden x-re és y-ra. Legyen a $w(x) = s(1234,x)$ egyváltozós rekurzív függvény indexe az i, vagyis $w = U^2(i,\cdot) = \varphi_i$, és legyen $m = w(i) = \varphi_i(i)$. Ekkor (1) és (2) alapján $x = i$ választással

$$\varphi_{g(m)} = H(i,\cdot) = U^2(s(1234,i),\cdot) = U^2(w(i),\cdot) = U^2(m,\cdot) = \varphi_m,$$

ahogyan kívántuk. QED

Legyen $A \subseteq \omega$ a parc.rek függvények egy *tulajdonsága*, vagyis ha i és j ugyanannak a függvénynek indexei (φ_i és φ_j ugyanaz a függvény), akkor i és j egyszerre van (vagy nincs) A-ban.

Tétel (Rice) *Ha $A \neq \emptyset$ és $A \neq \omega$, akkor A nem rekurzív.*

Bizonyítás: Feltétel szerint sem A, sem A-nak a komplementere nem üres, legyen például $a \in A$ és $b \notin A$. Tegyük fel továbbá, hogy A mégis rekurzív. Ekkor a

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{ha } x \notin A \\ b & \text{ha } x \in A \end{cases}$$

ugyancsak rekurzív függvény, és a fixpont tétel szerint van olyan $m \in \omega$, hogy $\varphi_{h(m)} = \varphi_m$, azaz $h(m)$ és m ugyanannak a függvénynek az indexei. Következésképp m és $h(m)$ egyszerre van A-ban.

Ha most $m \in A$, akkor h definíciója szerint $h(m) \notin A$, viszont ha $m \notin A$, akkor $h(m) \in A$, ami lehetetlen. QED